

1 Sätze von CASTIGLIANO

1.1 Erster Satz von CASTIGLIANO

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = Q_i \quad (1)$$

mit:

- W Formänderungsenergie
- q_i generalisierte Koordinat
- Q_i generalisierte Kraft

1.2 Zweiter Satz von CASTIGLIANO

$$\frac{\partial W^*}{\partial Q_i} = q_i \quad (2)$$

mit:

- W^* Formänderungsergänzungsenergie

für linear elastisches Material gilt $W^* = W$ und damit:

$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial Q_i} = q_i} \quad (3)$$

1.3 Vorteile

- Bestimmte Lagerkräfte oder Auslenkungen lassen sich ohne Bestimmung der gesamten Verformung (z.B.: mit $EIw^{IV} = q(x)$) berechnen.
- Dies gilt insbesondere für komplizierte Systeme.
- Zitat R. Wetter: 'Man kann integrieren üben'

1.4 Nützliches/Vorgehen

Vor dem Integrieren differenzieren:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W^*}{\partial Q_i} &= \frac{\partial}{\partial Q_i} \int \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dx \\ &= \int \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial Q_i} dx \end{aligned}$$

Bestimmen von Lagerreaktionen (Satz von MENAMBREA)

Am Lager gilt:

$$q_i = 0,$$

wobei q_i die Verschiebung/Verdrehung am Lager ist.

Vorgehen:

1. W als Funktion der unbekanntes Lagerkraft Q_L darstellen ($W = W(Q_L)$)
2. CASTIGLIANO ausführen: $\frac{\partial W(Q_L)}{\partial Q_L} = q_i \stackrel{!}{=} 0$
3. Nach Lagerkraft umstellen

Bestimmen von Verschiebungen/Verdrehungen wo keine Einzellast wirkt

Vorgehen:

1. Da wo die Verschiebung berechnet werden soll kurzerhand eine Einzellast \hat{Q} einführen, von der wir im Hinterkopf behalten, dass sie null ist.
2. W als Funktion der eingeführten Last \hat{Q} darstellen ($W = W(\hat{Q})$).
3. CASTIGLIANO ausführen und eingeführte Last **nach** Differentiation zu Null setzen:

$$\left. \frac{\partial W(\hat{Q})}{\partial \hat{Q}} \right|_{\hat{Q}=0} = q \quad (4)$$

Anmerkung: Das geschilderte Vorgehen kann natürlich auch für Verschiebungen dort genutzt werden wo Einzellasten angreifen. Es muß dann keine zusätzliche Last eingeführt werden und die Einzellast darf am Ende natürlich nicht zu Null gesetzt werden.