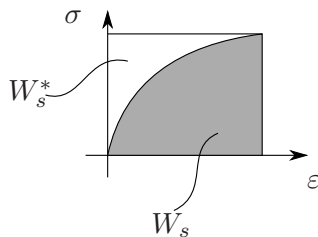


1 Energien kontinuierlicher Medien

1.1 Formänderungsenergie

Unter Formänderungsenergie versteht man die Energie die ein Körper besitzt, um in der aktuellen verformten Lage zu sein. Sie wird oft als potentielle Energie eines Körpers bezeichnet.

Allgemein gilt am Beispiel Dehnstab:



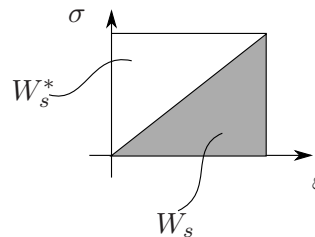
W_s ist die **spezifische Formänderungsenergie** die pro Volumenelement benötigt wird, um den Stab zu verformen. Sie ist quasi die Arbeit, die die Spannung am Volumenelement verrichtet.

W_s^* ist die **spezifische Formänderungsergänzungsenergie**.

W ist die gesamte **Formänderungsenergie**. Sie definiert sich als

$$W = \int_0^l W_s dV = \int_0^l W_s A dx.$$

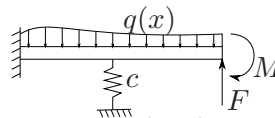
Linear elastisches Material:



$$\begin{aligned}\sigma &= E\varepsilon = Eu' \\ W_s &= \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{1}{2}Eu'^2 = W_s^* \\ W &= \frac{1}{2} \int_0^l EAu'^2 dx\end{aligned}$$

1.2 Äußere Arbeit und sonstige potentielle Energie

Am Beispiel des gezeigten Balkens:



Potentielle Energie einer Feder/Formänderungsenergie einer Feder :

$$W_F = \frac{1}{2}c\Delta x^2 = \frac{1}{2}c(w(\frac{l}{2}))^2$$

Äußere Arbeit:

$$A = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i + \sum_j \vec{M}_j \cdot \vec{\varphi}_j + \int_0^l q(x)w(x)dx$$

Die gesammte Energie, die ein System speichert, ist dann die Differenz aus der äußeren Arbeit und den potentiellen Energien:

$$\Pi = W - A$$

1.3 Kinetische Energie

Sie ist die Bewegungsenergie des Systems und definiert sich weiterhin als $\frac{1}{2} * m * v^2$, nur dass nun über das gesamte Gebiet integriert werden muss (siehe Tabelle).

1.4 Übersicht der Energien

	Längsdehnung	ebene Biegung	Torsion	Saite
Verformungsgröße	u	$w, \varphi = -w'$	ϑ	w
Steifigkeit	EA	EI_y	GI_p	Vorspannung S
Material-Struktur-Gesetz	$N = EAu'$	$M_b = -EI_y w''$	$M_t = GI_p \vartheta'$	
W in Schnittlastdarstellung	$W = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}} \frac{N^2}{EA} dx$	$W = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}} \frac{M_b^2}{EI_y} dx$	$W = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}} \frac{M_t^2}{GI_p} dx$	$W = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}} S(w')^2 dx$
W in Verformungsdarstellung	$W = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}} EA (u')^2 dx$	$W = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}} EI_y (w'')^2 dx$	$W = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}} GI_t (\vartheta')^2 dx$	siehe oben
kinetische Energie	$K = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}} \rho A \dot{u}^2 dx$	$K = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}} \rho A \dot{w}^2 dx$	$K = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}} \rho I_p \dot{\vartheta}^2 dx$	$K = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}} \rho A \dot{w}^2 dx$

2 Das Verfahren von Ritz

Das Verfahren ist ein Näherungsverfahren zur Bestimmung der Verformung (Statik), oder der Eigenkreisfrequenzen (Dynamik)

2.1 Statisch

1. Mache einen Ansatz für die Verformung der Art:

$$\xi(x) = \sum_{n=1}^N a_n \psi_n(x),$$

so, dass die ψ_n unabhängig voneinander sind, und die Funktion insgesamt den geometrischen Randbedingungen des Systems genügt.

2. Berechne dann $\Pi = W - A$
3. Π muß ein Minimum in der verformten statischen Lage haben. Es gilt:

$$\delta\Pi = \sum_{n=1}^N \frac{\partial\Pi}{\partial a_n} \delta a_n = 0.$$

Da die δa_n voneinander unabhängig sind muss weiter gelten $\frac{\partial\Pi}{\partial a_n} = 0$ für jedes n . Man erhält also N Gleichungen für die N Unbekannten a_n .

2.2 Dynamisch, Rayleigh-Ritz

1. Mache einen eingliedigen Ansatz für die Verformung der Art:

$$\xi(x, t) = a(t)\psi(x),$$

(Der Unterschied zwischen Ritz und Rayleigh-Ritz ist genau, dass der Ansatz eingliedrig ist)

2. Berechne dann $L = K - U$, wobei U hier identisch W ist.
3. Wende den LAGRANGEformalismus an:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{a}} \right) - \frac{\partial L}{\partial a} = 0$$

Am Beispiel Biegung ergibt sich:

$$\int_{\mathcal{L}} \rho A \psi^2 dx \cdot \ddot{a} + \int_{\mathcal{L}} EI_y (\psi'')^2 dx \cdot a = 0$$

4. Bestimme den Rayleigh-Quotienten und damit die erste Eigenkreisfrequenz ω
Am Beispiel Biegung ergibt sich:

$$\omega = \sqrt{\frac{\int_{\mathcal{L}} EI_y (\psi'')^2 dx}{\int_{\mathcal{L}} \rho A \psi^2 dx}}$$