LAGRANGEsche Gleichung 1. Art

Motivation

Bislang wurden im LAGRANGEformalismus 'nur' Bewegungsgleichungen unter Berücksichtigung von Potenialkräften und äußeren Kräften bestimmt. Zwangskräfte (Normalkräfte, Stabkräfte, Lagerkräfte etc.) konnten bisher nicht bestimmt werden. Die Bestimmung von Zwangskräften, also solchen Kräften die immer senkrecht zur Bewegung eines Körpers stehen, geschieht mittels der LAGRANGEschen Gleichung 1.Art.

Idee

Überführe ein System mit n Freiheitsgraden in ein System mit $n+m$ Freiheitsgraden. Jeder dieser m Freiheitsgrade steht für eine Bewegungsrichtung die bislang durch eine Zwangskraft eingeschränkt wurde (beispielsweise die radiale Bewegungsmöglichkeit eines Fadenpendels).
Für das neue System kann nun der LAGRANGEformalismus angewendet werden. Es werden nun m zusätzliche 'Bewegungsgleichungen' gewonnen, aus welchen die gesuchten Zwangskräfte dadurch bestimmt werden können, dass die eigentlichen Zwänge des Systems ja bekannt sind. (Dies ist auch als 'Prinzip von hinten mit der Faust ins Auge' bekannt).

Zwangsbedingungen

Die Zwänge denen das System ausgestzt sind, sind geometrischer Natur und können (für uns meist) dargestellt werden als Funktionen:

$$g_k(q_1, ...q_{n+m}) = 0 \quad k = 1, ..., m$$

Beispielsweise gilt für ein Fadenpendel $g(r) = r - l = 0$.
Die partiellen Ableitungen der Zwangsbedingungen in Richtung der generalisierten Koordinaten stehen immer senkrecht zur real möglichen also verträglichen Bewegungsebene in gleicher Richtung und proportional zu den Zwangskräften. Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial q_i} = Q_i^Z \ .$$

Die LAGRANGEsche Gleichung 1. Art lautet:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i + \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial q_i}}_{=Q_i^Z}}$$

mit

$i = 1, ..., n+m$	wobei $n+m$ die Anzahl der Freiheitsgerade und m die Anzahl der Zwangsbedingungen
q_i	generalisierte Koordinaten
$\dot{q}_i$	generalisierte Geschwindigkeiten
$L = K - U$	LAGRANGEfunktion
D	Dissipationsfunktion
Q_i	generalisierte Kräfte
g_k	k-te Zwangsbedingung in der Form $g_k(q_1, ..., q_{n+m}) = 0$
λ_k	LAGRANGEmultiplikator der k-ten Zwangsbedingung

Vorgehen

1. Überführe ein System von n Freiheitsgraden in ein System von $n + m$ Freiheitsgraden und wähle die generalisierten Koordinaten.
2. Formuliere die m Zwangsbedingungen $g_k(q_1, ..., q_{n+m}) = 0$.
3. Stelle die LAGRANGEfunktion auf.
4. Ableiten der benötigten Terme.
5. Einsetzen und identifizieren der LAGRANGEmultiplikatoren und Zwangskräfte.