LAGRANGEsche Gleichungen 2. Art

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i}$$

mit

$i = 1, ..., n$	wobei n die Anzahl der Freiheitsgerade des Systems ist
q_i	generalisierte Koordinaten
$\dot{q}_i$	generalisierte Geschwindigkeiten
$L = K - U$	LAGRANGEFUNKTION
D	Dissipationsfunktion
Q_i	generalisierte Kräfte

Generalisierte Kräfte

Um auch nicht-konservative Kräfte im LAGRANGEformalismus zu berücksichtigen werden die Kräfte in die jeweilige Richtung der generalisierten Koordinaten 'projeziert'. Diese Kräfte heißen generalisierte Kräfte.

$$Q_i = \sum_{j=1}^{m} \vec{F}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}$$

Um die generalisierten Kräfte zu bestimmen ist es meist zweckmäßig die virtuelle Arbeit zu ermitteln:

$$\delta W = \sum_{j=1}^{m} \vec{F}_j \cdot \delta \vec{r}_j = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m} \vec{F}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}\right)}_{=Q_i} \delta q_i$$

Die generalisierten Kräfte sind also die Vorfaktoren der Varitaionen der generalisierten Koordinaten in der virtuellen Arbeit.

Dissipationsfunktion

Die Klasse der dissipativen Kräfte (also Kräfte die dem System aktiv Energie entziehen) können entweder als generalisierte Kraft im LAGRANGEformalismus berücksichtigt werden oder aber mittels der Dissipationsfunktion D. Diese lauten:

- COULOMBsche Reibung: $\boxed{D_1 = \mu N |\vec{v}_{rel}|^1}$
  μ ist der Gleitreibungskoeffizient, N ist die Normalkraft
- linearer Dämpfer: $\boxed{D_2 = \frac{1}{2} d |\vec{v}_{rel}|^2}$
  d ist die Dämpfungskonstante
- Luftwiderstand: $\boxed{D_3 = \frac{1}{3} c |\vec{v}_{rel}|^3}$
  c ist der Luftwiderstandsbeiwert

Die negativen partiellen Ableitungen der Dissipationsfunktion nach den generalisierten Geschwindigkeiten ergeben die generalisierten Kräfte der dissipativen Kräfte:

$$Q_i^D = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}$$