2. Klausur Energiemethoden der Mechanik - WS 09/10

Prof. Dr. rer. nat. Valentin Popov

Bitte deutlich schreiben!

T	
1	
2	
3	
$\sum$	

Name, Vorname:

Matr.-Nr.:

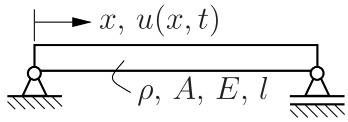
Studiengang:

$\boxed{1}$ **(Bekannte Aufgabe)** **(1+5+4 Punkte)**

Der dargestellte Stab führt infolge einer einmaligen Anregung Longitudinalschwingungen aus.

Mit dem Verfahren von Rayleigh-Ritz soll eine Näherungslösung für die erste Eigenkreisfrequenz bestimmt werden. Verwenden sie den Ritz-Ansatz

$$u(x,t) = x^2(3l - 2x)q(t)$$



und gehen Sie wie folgt vor:

(a) Prüfen Sie, ob die Ansatzfunktion $u(x,t)$ die geometrischen Randbedingungen erfüllt.

(b) Stellen Sie unter Verwendung der Ansatzfunktion die Lagrange-Funktion für den Stab auf.

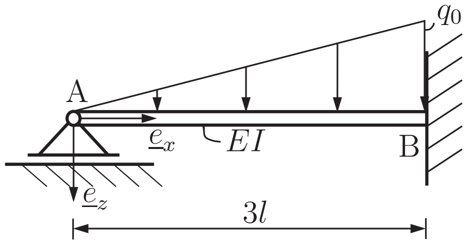
(c) Bestimmen Sie daraus eine Näherungslösung für die erste Eigenkreisfrequenz.

Geg.: ρ, A, E, l

2 (8+7 Punkte)

Der dargestellte Balken ist mit einer linearen Streckenlast beaufschlagt. Es ist die Verdrehung an der Stelle $x = l$ unter Verwendung des Satzes von Castigliano zu bestimmen.

Geg.: EI, l, q_o



(a) Überführen Sie das System in ein äquivalentes, statisch bestimmtes Ersatzsystem indem Sie das Lager bei A durch eine Kraft ersetzen. Bestimmen Sie diese.

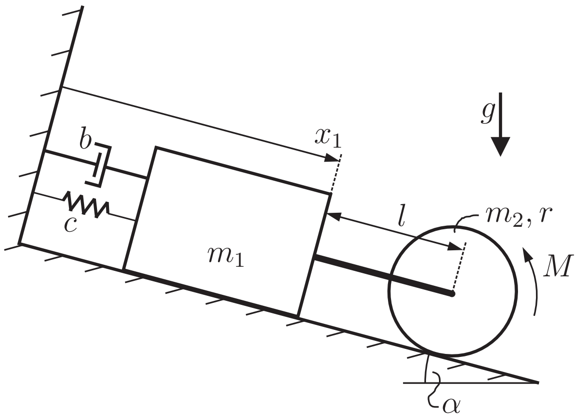
(b) Bestimmen Sie nun den Verdrehwinkel φ_l des Balkens an der Stelle $x = l$. Gehen Sie dabei davon aus, dass $\underline{A} = -\frac{3}{10}q_0 l \underline{e}_z$ die Ersatzkraft an der Stelle A ist.

3 (2+4+3+2+4 Punkte)

Auf einer schiefen Ebene (Neigungswinkel α) befindet sich ein System aus einem Klotz (Masse m_1) und einem Vollzylinder (Masse m_2, Radius r), die durch eine starre Stange (Länge l, Masse vernachlässigbar) miteinander verbunden sind.

Der Klotz gleitet reibungsfrei über den Boden und ist mittels einer Feder (Federsteifigkeit c, entspannt bei $x_1 = a$) und eines linearen Dämpfers (Dämpfungskonstante b) an die Umgebung gekoppelt. Die Rolle führt eine reine Rollbewegung aus. An ihr greift außerdem das Moment M an.

Mittels des Lagrange-Formalismus sollen die Bewegungsgleichung des Systems und die Kraft in der Stange berechnet werden. Geg.: $g, m_1, m_2, r, l, a, \alpha, b, c, M$



(a) Wählen Sie eine geeignete generalisierte Koordinate x_2 zusätzlich zu x_1, so dass mit dem Lagrange-Formalismus die Stangenkraft bestimmt werden kann. Erklären Sie die Bedeutung dieser Koordinate und geben Sie die Zwangsbedingung(en) an.

(b) Stellen Sie die Lagrange-Funktion in den beiden generalisierten Koordinaten x_1 und x_2 auf.

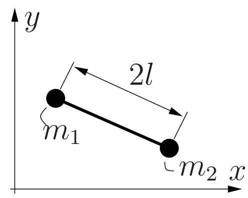
(c) Beschreiben Sie den Einfluss des Dämpfers und des Momentes M mittels Dissipationsfunktion bzw. generalisierter Kraft.

(d) Stellen Sie die Lagrange-Gleichungen 1. Art auf.

(e) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung(en) und die Kraft in der Stange.

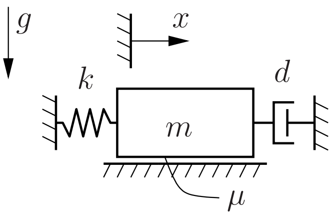
Theorieaufgaben (je 1 Punkt)

1. Die ebene Bewegung zweier Punktmassen m_1 und m_2 sei durch die Koordinaten $\{x_1, y_1\}$ bzw. $\{x_2, y_2\}$ beschrieben. Die Punktmassen sind mit einer masselosen, starren Stange der Länge $2l$ verbunden. Geben Sie die Zwangsbedingung in der Form $g(x_1, y_1, x_2, y_2) = 0$ an.



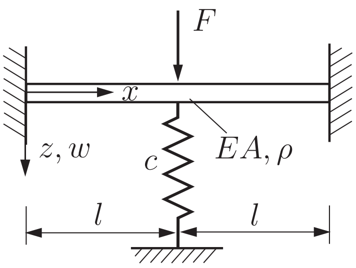
$$g(x_1, y_1, x_2, y_2) =$$

2. Wie lautet die Dissipationsfunktion des skizzierten Systems mit der generalisierten Koordinate x? (Feder entspannt bei $x = 0$, beachten Sie auch die Reibung an der Unterlage.)



$$D =$$

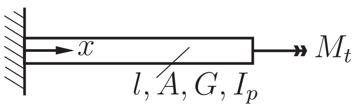
3. Passen Sie die Funktion w so an die geometrischen Randbedingungen des skizzierten Systems an, dass sie ein sinnvoller Ritz-Ansatz für die Durchbiegung des Balkens ist.



$$w(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \cos(\tfrac{\pi x}{l})$$

$$w(x) =$$

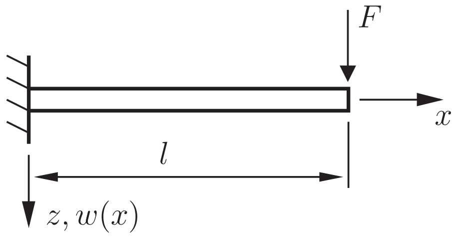
4. Ein Torsionsstab (Länge l, kreisrunde Querschnittsfläche A) ist links eingespannt und wird am rechten Ende durch ein Torsionsmoment M_t verformt. Bestimmen Sie die Verdrehung $\varphi(l)$ am rechten Ende des Stabes mit dem Satz von Castigliano.
   Gegeben: l, A, G, I_p



$$\varphi(l) =$$

5. Geben Sie den Vertauschungssatz von Maxwell an und benennen Sie die von Ihnen eingeführten Größen.

6. Ein einseitig fest eingespannter Balken (Steifigkeit EI, Masse m, Länge l) verbiegt sich unter dem Einfluss einer Kraft F. Geben Sie die potentielle Energie des Balkens als Funktion der Biegelinie $w(x)$ an.



$U =$

7. Geben Sie die komplementäre Energie für einen Balken (Länge l, kreisrunde Querschnittsfläche A) an, der gleichzeitig auf Biegung und Torsion beansprucht wird. Gegeben: l, A, EI, GI_p

$\tilde{U} =$

Benennen Sie die von Ihnen eingeführten Größen.

8. Die Bewegung eines Systems sei durch eine einzige Koordinate vollständig beschreibbar. Formulieren Sie die Lagrange-Gleichungen 1. Art für dieses System in den generalisierten Koordinaten x und φ. Berücksichtigen Sie eine Dissipationsfunktion D und eine Zwangsbedingung $g(x, \varphi) = 0$.

9. Aus dem spannungsfreien Zustand wird eine lineare Feder (Federsteifigkeit c) durch eine Kraft F um die Länge x zusammengedrückt. Wie groß ist dann die komplementäre Energie der Feder?

$\tilde{U} =$

10. Für ein System mit einem Freiheitsgrad wird in Abhängigkeit der Winkelkoordinate φ die folgende potenzielle Energie $U(\varphi)$ ermittelt:

$$U(\varphi) = -mgl\,(1 - \cos(\varphi)) + C$$

Wie viele stabile und instabile Gleichgewichtslagen hat das System im Bereich $-\pi \leq \varphi < \pi$?

☐ stabile und ☐ instabile Gleichgewichtslage(n)

Geg.: l, m, g, $C =$ konst.