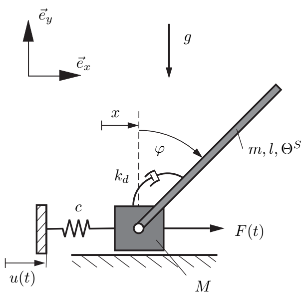
Tutorium

Aufgabe 26

Das dargestellte System besteht aus einem dünnen, homogenen Stab (Länge l, Masse m, Massenträgheitsmoment Θ^S) und einem Klotz (Masse M), der reibungsfrei auf der Unterlage gleitet. Er wird bei seiner Bewegung entlang der Unterlage (Koordinate x) durch eine vorgegebene Kraft $F(t)$ in horizontaler Richtung angetrieben und ist andererseits mit einer immer horizontal gerichteten Feder verbunden. Deren linker Fußpunkt wird durch die vorgegebene Auslenkung $u(t)$ bewegt. Für $x = u(t) = 0$ ist die Feder spannungslos. Zwischen Klotz und Stange wirkt ein winkelgeschwindigkeitsproportionaler Drehdämpfer mit der Dämpferkonstante k_d.



(a) Stellen Sie die LAGRANGEfunktion L des Systems bzgl. der generalisierten Koordinaten x und φ auf.
(b) Stellen Sie die Dissipationsfunktion D des Systems auf.
(c) Geben Sie die generalisierte (Rest-)Krafte Q_x an.
(d) Bestimmen Sie die Bewegungsdifferentialgleichungen für das System.

Geg.: M, Θ^S, m, l, c, g, $F(t)$, k_d

(a) Bestimmen der LAGRANGEfunktion L

Kinematik: Das System hat 2 Freiheitsgrade, weshalb 2 generalisierte Koordinaten gewählt werden.

$$q_1 = x \text{ Koordinate zum Mittelpunkt der Masse } M \tag{1}$$
$$q_2 = \varphi \text{ Drehwinkel (siehe Skizze)} \tag{2}$$

Die Ortsvektoren und Geschwindigkeiten:

$$\underline{r}_M = x\underline{e}_x \;\Rightarrow\; \underline{v}_M \equiv \underline{\dot{r}}_1 = \dot{x}\underline{e}_x \tag{3}$$
$$\underline{r}_m = x\underline{e}_x + \frac{1}{2}l\sin\varphi\underline{e}_x + \frac{1}{2}l\cos\varphi\underline{e}_y \tag{4}$$
$$\Rightarrow \underline{v}_m \equiv \underline{\dot{r}}_2 \tag{5}$$
$$= \big(\dot{x} + \frac{1}{2}l\cos\varphi\dot{\varphi}\big)\underline{e}_x + \big(-\frac{1}{2}l\sin\varphi\dot{\varphi}\big)\underline{e}_y$$

$$v_m^2 = (\dot{x} + \frac{1}{2}l\dot{\varphi}\cos\varphi)^2 + (-\frac{1}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi)^2 \tag{6}$$
$$= \dot{x}^2 + l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{1}{4}l^2\dot{\varphi}^2 \tag{7}$$

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}\Theta^S\dot{\varphi}^2 \tag{8}$$
$$\tag{9}$$
$$= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\frac{1}{4}l^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}ml\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi + \frac{1}{2}\Theta^S\dot{\varphi}^2 \tag{10}$$
$$= \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\Theta^S + \frac{1}{4}ml^2\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}ml\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi \tag{11}$$

Potientelle Energie:

$$U = \frac{1}{2}mgl\cos\varphi + \frac{1}{2}c(x-u(t))^2 \tag{12}$$

Lagrange - Funktion:

$$L = T - U \tag{13}$$
$$L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\Theta^S + \frac{1}{4}ml^2\right)\dot{\varphi}^2 \tag{14}$$
$$+ \frac{1}{2}ml\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi - \frac{1}{2}mgl\cos\varphi - \frac{1}{2}c(x-u(t))^2 \tag{15}$$

(b) Die Dissipationsfunktion D des Systems:

$$D = \frac{1}{2}d|v_{rel}|^2 = \frac{1}{2}k_d\dot{\varphi}^2 \tag{16}$$

(c) Generalisierte Kräfte Q_x und Q_φ:

$$\delta W = F(t)\delta x \tag{17}$$
$$Q_x = F(t) \qquad Q_\varphi = 0 \tag{18}$$

(d) Lagrange - Gleichungen 2.Art: für nicht konservative Systeme mit Dissipationsfunktion

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = Q_x \tag{19}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\Big) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}} = Q_\varphi \tag{20}$$

Ableitungen:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\,\dot{x} + \frac{1}{2}ml\dot{\varphi}\cos\varphi \tag{21}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x} + \frac{1}{2}ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - \frac{1}{2}ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi \tag{22}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = -c(x-u(t)) \qquad \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = 0 \tag{23}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \left(\Theta^S + \frac{1}{4}ml^2\right)\dot{\varphi} + \frac{1}{2}ml\dot{x}\cos\varphi \tag{24}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \left(\Theta^S + \frac{1}{4}ml^2\right)\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}ml\ddot{x}\cos\varphi - \frac{1}{2}ml\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi \tag{25}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\frac{1}{2}ml\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + \frac{1}{2}mgl\sin\varphi \tag{26}$$
$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}} = k_d\dot{\varphi} \tag{27}$$

Bewegungsdifferentialgleichungen:

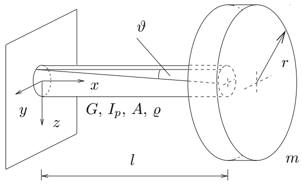
$$(M+m)\ddot{x} + \frac{ml}{2}\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) + c(x-u(t)) = F(t) \tag{28}$$
$$\left(\Theta^S + \frac{ml^2}{4}\right)\ddot{\varphi} + \frac{ml}{2}\left(\ddot{x}\cos\varphi - g\sin\varphi\right) + k_d\dot{\varphi} = 0 \tag{29}$$

Aufgabe 68

Ein eingespannter, massebehafteter Stab mit kreisförmigem Querschnitt trägt an seinem Ende eine Einzelmasse m. Geeignete Anfangsbedingungen lassen den Stab um seine Längsachse schwingen.

Bestimmen Sie näherungsweise die erste Eigenkreisfrequenz.

Geg.: l, r, m, G, I_p, A, ϱ



Wahl einer Ansatzfunktion

$$\vartheta(x,t) = \varphi(x)f(t) \tag{30}$$
$$\varphi(x) = a(t)x \tag{31}$$

Bestimmung der potentiellen und der kinetischen Energie.

$$U_{max} = \frac{1}{2}\int_0^l GI_p{\varphi'}^2 \mathrm{d}x \tag{32}$$
$$= \frac{1}{2}GI_p a(t)^2 \int_0^l 1 \mathrm{d}x \tag{33}$$
$$= \frac{1}{2}GI_p a(t)^2 l \tag{34}$$

$$K = \frac{1}{2}\int_0^l \rho I_p \dot{\varphi}^2 \mathrm{d}x + \frac{\Theta_S}{2}\dot{\varphi}^2(l) \tag{35}$$
$$= \frac{1}{2}\rho I_p \dot{a}(t)^2 \int_0^l x^2 \mathrm{d}x + \frac{m}{4}r^2\dot{a}(t)^2 l^2 \tag{36}$$
$$= \frac{1}{2}\rho I_p \dot{a}(t)^2\left[\frac{1}{3}l^3\right] + \frac{m}{4}r^2\dot{a}(t)^2 l^2 \tag{37}$$
$$= \frac{1}{6}\rho I_p \dot{a}(t)^2 l^3 + \frac{m}{4}r^2\dot{a}(t)^2 l^2 \tag{38}$$

Anwenden des Lagrangeformalismus für die generalisierte Koordinate $q = a$ ergibt:

$$\left(\frac{1}{3}\rho I_p l^3 + \frac{m}{2}r^2\dot{a}(t)^2 l^2\right)\ddot{a}(t) + GI_p l\, a(t)^2 = 0 \tag{39}$$

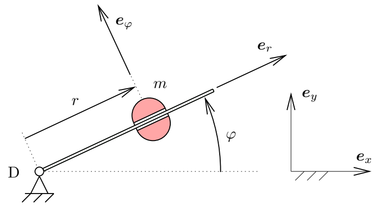
Damit folgt für die Eigenkreisfrequenz:

$$\tilde{\omega}^2 = \frac{12GI_p}{4\rho I_p l^2 + 6mr^2 l}$$
$$\Rightarrow \quad \tilde{\omega} = \sqrt{\frac{12GI_p}{4\rho I_p l^2 + 6mr^2 l}} \tag{40}$$

Hausaufgabe

Aufgabe 39

Auf einer unendlich langen starren masselosen Stange gleitet reibungsfrei die Punktmasse m. Die Drehung der Stange ist vorgegeben als $\varphi(t) = \omega t$ (Rotation mit konstanter Winkelgeschwindigkeit). Bestimmen Sie die Kraft der Stange auf die Masse. Benutzen Sie r und φ als generalisierte Koordinaten. Und gehen Sie wie folgt vor:



(a) Bestimmen Sie den Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ mit Ursprung D. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}(r,\varphi,\dot{r},\dot{\varphi}) = v_r\boldsymbol{e}_r + v_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$ und $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2}$.

(b) Bestimmen Sie die kinetische Energie E und damit die Lagrange-Funktion $L(r,\dot{r},\dot{\varphi})$.

(c) Geben Sie die (holonome, rheonome) Zwangsbedingung in der Form $f(\varphi,t) = 0$ an. Berechnen Sie $\frac{\partial f}{\partial r}$ sowie $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$.

(d) Stellen Sie die Gleichungen $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \lambda\frac{\partial f}{\partial q_j} = 0$ auf. Setzen Sie darin die Zwangsbedingung ein. Und geben Sie die beiden resultierenden Dgln. für r und λ an.

(e) Geben Sie die generalisierten Zwangskräfte Q_r und Q_φ an. Berechnen Sie daraus die Zwangskraft $\boldsymbol{Z}$ in der Basis $\langle\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\varphi\rangle$, also $\boldsymbol{Z} = Z_r\boldsymbol{e}_r + Z_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$. Kontrollieren Sie die Dimension von $\boldsymbol{Z}$.

Geg.: m, ω =const.

(a)

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r \tag{41}$$
$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi \tag{42}$$
$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2} \tag{43}$$

(b)

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = L \tag{44}$$

(c)

$$f = \varphi - \omega t = 0 \tag{45}$$
$$\frac{\partial f}{\partial r} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 1 \tag{46}$$

(d) Lagrange Gln. 1. Art:

$$\frac{\mathrm{d}\big(m\dot{r}\big)}{\mathrm{d}t} - m\dot{\varphi}^2 r = 0 \tag{47}$$
$$\ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r = 0 \tag{Dgl 1}$$
$$\frac{\mathrm{d}\big(mr^2\dot{\varphi}\big)}{\mathrm{d}t} - \lambda = 0 \tag{48}$$
$$2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi} - \lambda = 0 \tag{Dgl 2}$$

Zusätzlich Zwangsbedingung:

$$\varphi - \omega t = 0 \tag{49}$$
$$\dot{\varphi} = \omega \tag{50}$$
$$\ddot{\varphi} = 0 \tag{51}$$

Diese Gleichungen eingesetzt in (Dgl 1) und (Dgl 2):

$$\ddot{r} - r\omega^2 = 0 \tag{52}$$
$$\lambda = 2mr\dot{r}\omega \tag{53}$$

(e) Generalisierte Zwangskräfte:

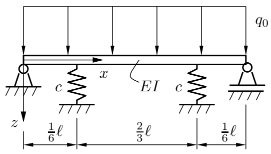
$$Q_r^\lambda = 0 = \boldsymbol{Z} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} \tag{54}$$
$$= \boldsymbol{Z} \cdot \boldsymbol{e}_r \tag{55}$$
$$0 = Z_r \tag{56}$$
$$Q_\varphi^\lambda = \lambda = \boldsymbol{Z} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} \tag{57}$$
$$= \boldsymbol{Z} \cdot (r\boldsymbol{e}_\varphi) \tag{58}$$
$$\lambda = rZ_\varphi \tag{59}$$

Also ist das Endergebnis:

$$Z_r = 0 \tag{60}$$
$$Z_\varphi = \frac{\lambda}{r} \tag{61}$$
$$= 2m\dot{r}\omega \tag{62}$$
$$[Z_\varphi] = 1\text{kg m/s}^2 \tag{63}$$
$$= 1\text{N} \tag{64}$$

Aufgabe 55

Ermitteln Sie mit dem Ritzschen Verfahren für das skizzierte System die Durchbiegung an der Stelle $x = \ell/2$. Verwenden Sie dazu den folgenden Ansatz, nachdem Sie ihn an die geometrischen Randbedingungen angepaßt haben.



Ansatz: $\widetilde{w}(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$

Geg.: EI, c, q_o, ℓ

Ansatz:

$$\widetilde{w}(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \tag{65}$$

Anpassung an die RB:

$$w(x{=}0) = 0 \quad \hookrightarrow \quad a_0 = 0 \tag{66}$$
$$w(x{=}\ell) = 0 \quad \hookrightarrow \quad a_2\ell^2 + a_1\ell = 0 \tag{67}$$
$$\hookrightarrow \quad a_1 = -a_2\ell \tag{68}$$

Als (im Sinne der Randbedingungen) zulässige Ansatzfunktion ergibt sich:

$$\widetilde{w}(x) = a_2(x^2 - \ell x) \tag{69}$$

Der Faktor a_2 in $\tilde{w}(x)$ bleibt vorerst unbestimmt.

Elastisches Potential:

$$\Pi = W - A \tag{70}$$

mit (RuÜT = Rand- und Übergangsterme)

$$W = \frac{1}{2}\int_0^\ell EI\widetilde{w}''^2\mathrm{d}x + \underbrace{\frac{1}{2}c\Big[\widetilde{w}\Big(\frac{1}{6}\ell\Big)\Big]^2 + \frac{1}{2}c\Big[\widetilde{w}\Big(\frac{5}{6}\ell\Big)\Big]^2}_{\text{RuÜT}} \tag{71}$$

$$A = \int_0^\ell q_0\widetilde{w}(x)\mathrm{d}x \tag{72}$$

Einsetzen des Ansatztes Gl. (69) ergibt:

$$W = a_2^2\Big[2EI\ell + c\ell^4\frac{25}{1296}\Big] \tag{73}$$
$$A = \frac{1}{6}q_0a_2\ell^3 \tag{74}$$

Bildung der Variation: (. . . und Bestimmung des Koeffizienten a_2 so, dass die Variation gerade verschwindet)

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial a_2}\delta a_2 = 0 \quad \forall\delta a_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\partial\Pi}{\partial a_2} = 0 \tag{75}$$

Also

$$\frac{\partial\Pi}{\partial a_2} = 2a_2\left(2EI\ell + c\ell^4\frac{25}{1296}\right) + \frac{1}{6}q_0\ell^3 \stackrel{!}{=} 0 \tag{76}$$
$$\hookrightarrow a_2 = -\frac{q_0\ell^3}{12\left(2EI\ell + c\ell^4\frac{25}{1296}\right)} \tag{77}$$

Lösung: (Biegelinie durch Einsetzen des gerade bestimmten Koeffizienten a_2 in den Ansatz für die Biegelinie Gl. (69))

$$\widetilde{w}(x) = \frac{q_0\ell^3}{12\left(2EI\ell + c\ell^4\frac{25}{1296}\right)}\left(\ell x - x^2\right) \tag{78}$$

. . . ausgewertet an der Stelle $x = \frac{\ell}{2}$

$$\widetilde{w}\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{q_0\ell^4}{48\left(2EI + c\ell^3\frac{25}{1296}\right)} \tag{79}$$

Vergleich dieser Näherungslösung mit der analytisch exakten Lösung ($c = 0$):

$$\widetilde{w}_{\text{Ritz}}\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{1}{96}\,\frac{q_0\ell^4}{EI} \approx 0{,}01042\,\frac{q_0\ell^4}{EI} \tag{80}$$
$$w_{\text{exakt}}\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{5}{384}\,\frac{q_0\ell^4}{EI} \approx 0{,}01302\,\frac{q_0\ell^4}{EI} \tag{81}$$

Die exakte Durchsenkung in der Mitte ist also größer als die abgeschätzte. Im Umkehrschluss ist das mit dem Ritzschen Verfahren abgebildete Ersatzsystem steifer als das reale. Dies ist einleuchtend, denn im Gleichgewicht nimmt das elastische Potential ein Minimum an ($\delta\Pi \stackrel{!}{=} 0$). Die Näherungslösung kommt also „von oben" - vom steiferen System.