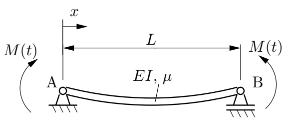
Lösungshinweis:

Tutorium

Aufgabe 89

Ein elastischer, massebehafteter Balken (Biegesteifigkeit EI, Länge L, Querschnittsfläche A und Dichte ρ) ist links und rechts gelenkig gelagert. An beiden Enden greift ein periodisches Moment $M(t) = M_0 \cos \Omega t$ an.



(a) Wie lauten die *geometrischen* Randbedingungen für das System?

(b) Berechnen Sie die kinetische Energie T, die potentielle Energie U sowie die virtuelle Arbeit δW für das Gesamtsystem.

(c) Formulieren Sie das Prinzip von Hamilton für das untersuchte System.

(d) Leiten Sie nun die Bewegungsdifferentialgleichung und die *dynamischen* Randbedingungen her.

Geg.: M_0, Ω, L, EI, A, μ

(a)

$$w(0,t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \delta w(0,t) = 0 \tag{1}$$

$$w(l,t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \delta w(l,t) = 0 \tag{2}$$

(b)

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \mu \dot{w}^2 \mathrm{d}x \tag{3}$$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EI{w''}^2 \mathrm{d}x \tag{4}$$

$$\delta W = M(t)\delta w'(0,t) - M(t)\delta w'(l,t) \tag{5}$$

(c)

Das Prinzip von Hamilton lautet:

$$\delta \int_{t_0}^{t_l} (T-U)\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_l} \delta W \mathrm{d}t = 0 \tag{6}$$

(d)

Aus Gleichung (6) folgt:

$$\delta \int_{t_0}^{t_l} \left\{ \frac{1}{2}\int_0^l \mu \dot{w}^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^l EI{w''}^2 \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_l} \left\{ M(t)\delta w'(0,t) - M(t)\delta w'(l,t) \right\} \mathrm{d}t = 0 \tag{7}$$

Variation unter die Integrale ziehen:

$$\int_{t_0}^{t_l} \left\{ \frac{1}{2}\int_0^l \mu \delta \dot{w}^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^l EI\delta {w''}^2 \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_l} \left\{ M(t)\delta w'(0,t) - M(t)\delta w'(l,t) \right\} \mathrm{d}t = 0 \tag{8}$$

Durchführen der Variation:

$$\delta \dot{w}^2 = 2\dot{w}\delta\dot{w} \qquad \text{usw.} \tag{9}$$

$$\int_{t_0}^{t_l} \left\{ \int_0^l \mu \dot{w} \delta \dot{w} \mathrm{d}x - \int_0^l EI w'' \delta w'' \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_l} \left\{ M(t)\delta w'(0,t) - M(t)\delta w'(l,t) \right\} \mathrm{d}t = 0 \tag{10}$$

Im Folgenden werden die Integrale der Übersichtlichkeit halber einzeln betrachtet. Dabei werden um δw zu faktorisieren partielle Integrationen durchgeführt.

I

$$\int_{t_0}^{t_l}\int_0^l \mu \dot{w}\delta\dot{w} \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^l \underbrace{\left[\mu\dot{w}\delta w\right]_{t_0}^{t_1}}_{\substack{=0,\text{ siehe}\\ \text{Voraussetzungen}\\ \text{von Hamilton}}} \mathrm{d}x - \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \mu \ddot{w}\delta w \mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{11}$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \mu \ddot{w}\delta w \mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{12}$$

II

$$
\begin{aligned}
-\int_{t_0}^{t_l}\int_0^l EIw''\delta w''\mathrm{d}x\mathrm{d}t = &-\int_{t_0}^{t_l}\left[EIw''\delta w'\right]_0^l \mathrm{d}t \\
&+\int_{t_0}^{t_l}\int_0^l EIw'''\delta w'\mathrm{d}x\mathrm{d}t \qquad (13)\\
=&\int_{t_0}^{t_l}\left[EIw''(0,t)\delta w'(0,t)\right.\\
&\left.-EIw''(l,t)\delta w'(l,t)\right]\mathrm{d}t\\
&+\int_{t_0}^{t_l}\underbrace{\left[EIw'''\delta w\right]_0^l}_{=0,\ \text{siehe geom. RB}}\mathrm{d}t\\
&-\int_{t_0}^{t_l}\int_0^l EIw''''\delta w\mathrm{d}x\mathrm{d}t \qquad (14)\\
=&\int_{t_0}^{t_l}\left[EIw''(0,t)\delta w'(0,t)\right.\\
&\left.-EIw''(l,t)\delta w'(l,t)\right]\mathrm{d}t\\
&-\int_{t_0}^{t_l}\int_0^l EIw''''\delta w\mathrm{d}x\mathrm{d}t \qquad (15)
\end{aligned}
$$

III

$$
\int_{t_0}^{t_l}\left\{M(t)\delta w'(0,t)-M(t)\delta w'(l,t)\right\}\mathrm{d}t \qquad \text{wird nicht umgeformt} \qquad (16)
$$

Alles wieder ins Prinzip von Hamilton einsetzen und sortieren:

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\left(-\mu\ddot{w}-EIw''''\right)\delta w\mathrm{d}x\mathrm{d}t && (17)\\
&+\int_{t_0}^{t_l}\left\{EIw''(0,t)+M(t)\right\}\delta w'(0,t)\mathrm{d}t && (18)\\
&+\int_{t_0}^{t_l}\left\{-EIw''(l,t)-M(t)\right\}\delta w'(l,t)\mathrm{d}t=0 && (19)
\end{aligned}
$$

Da die Variationen δw, $\delta w'(0,t)$ und $\delta w'(l,t)$ unabhängig sind, müssen die einzelnen Terme davor getrennt voneinander verschwinden. Aus Gleichung (17) folgt die Feldgleichung zu:

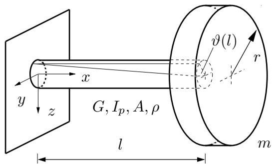
$$
\ddot{w}+c^2w''''=0 \qquad \text{mit} \qquad c^2=\frac{EI}{\mu} \qquad (20)
$$

Aus Gleichung (18) und (19) folgen die dynamischen Randbedingungen, welche auch aus Freischnitten bestimmt werden könnten:

$$
\begin{aligned}
w''(0,t)&=-\frac{M(t)}{EI} && (21)\\
w''(l,t)&=-\frac{M(t)}{EI} && (22)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 91

Ein eingespannter, massebehafteter Stab mit kreisförmigem Querschnitt trägt an seinem Ende eine Einzelmasse.



(a) Wie lautet die *geometrische* Randbedingung für das System?

(b) Berechnen Sie die kinetische Energie T und die potentielle Energie U für das Gesamtsystem.

(c) Formulieren Sie das Prinzip von Hamilton für das untersuchte System.

(d) Leiten Sie nun die Bewegungsdifferentialgleichung und die *dynamische* Randbedingung her.

Geg.: l, m, G, I_p, A, ρ, r

(a) geometrische Randbedingung:

$$
\begin{aligned}
&\vartheta(0,t)=0\quad\forall t && (23)\\
\Rightarrow\quad &\delta\vartheta(0,t)=0\quad\forall t && (24)
\end{aligned}
$$

(b) kinetische und potentielle Energie:

$$
\begin{aligned}
T&=\frac{1}{2}\int_0^l\varrho I_p\dot{\vartheta}^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\underbrace{\Theta}_{\frac{m}{2}r^2}\dot{\vartheta}^2(l,t)\\
&=\frac{1}{2}\int_0^l\varrho I_p\dot{\vartheta}^2\mathrm{d}x+\frac{m}{4}r^2\dot{\vartheta}^2(l,t) && (25)\\
U&=\frac{1}{2}\int_0^l GI_p{\vartheta'}^2\mathrm{d}x && (26)
\end{aligned}
$$

(c) Prinzip von Hamilton:

$$
\delta\int_{t_0}^{t_1}(T-U)+\int_{t_0}^{t_1}\delta W\mathrm{d}t=0 \qquad (27)
$$

Es wirken keine nichtkonservativen Lasten:

$$
\delta W=0 \qquad (28)
$$

(d) Aus Gleichung (27) folgt:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^l \varrho I_p \dot{\vartheta}^2 \mathrm{d}x + \frac{m}{4} r^2 \dot{\vartheta}^2(l,t) - \dots \right.$$

$$\left. \dots - \frac{1}{2} \int_0^l G I_p {\vartheta'}^2 \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}t = 0 \tag{29}$$

Variation unter die Integrale ziehen:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^l \varrho I_p \delta\dot{\vartheta}^2 \mathrm{d}x + \frac{m}{4} r^2 \delta\dot{\vartheta}^2(l,t) - \dots \right.$$

$$\left. \dots - \frac{1}{2} \int_0^l G I_p \delta{\vartheta'}^2 \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}t = 0 \tag{30}$$

Durchführen der Variation:

$$\delta\dot{\vartheta}^2 = 2\dot{\vartheta}\delta\dot{\vartheta} \tag{31}$$

$$\delta{\vartheta'}^2 = 2\vartheta'\delta\vartheta' \tag{32}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^l \varrho I_p \dot{\vartheta}\delta\dot{\vartheta} \mathrm{d}x + \frac{m}{2} r^2 \dot{\vartheta}(l,t)\delta\dot{\vartheta}(l,t) - \dots \right.$$

$$\left. \dots - \int_0^l G I_p \vartheta'\delta\vartheta' \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}t = 0 \tag{33}$$

Im Folgenden werden die drei Terme aus Gleichung (33) gesondert betrachtet. Dabei werden, um $\delta\vartheta$ zu faktorisieren partielle Integrationen durchgeführt.

I:

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \varrho I_p \dot{\vartheta}\delta\dot{\vartheta}\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^l \underbrace{\Big[\varrho I_p \dot{\vartheta}\delta\vartheta\Big]_{t_0}^{t_1}}_{=0 \text{ lt. Voraussetzung von Hamilton}} \mathrm{d}x - \dots$$

$$- \dots \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \varrho I_p \ddot{\vartheta}\delta\vartheta\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{34}$$

$$= - \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \varrho I_p \ddot{\vartheta}\delta\vartheta\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{35}$$

II:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{m}{2} r^2 \dot{\vartheta}(l,t)\delta\dot{\vartheta}(l,t)\mathrm{d}t = \underbrace{\Big[\frac{m}{2} r^2 \dot{\vartheta}(l,t)\delta\vartheta(l,t)\Big]_{t_0}^{t_1}}_{=0 \text{ lt. Voraussetzung}} - \dots$$

$$\dots - \int_{t_0}^{t_1} \frac{m}{2} r^2 \ddot{\vartheta}(l,t)\delta\vartheta(l,t)\mathrm{d}t$$

$$= - \int_{t_0}^{t_1} \frac{m}{2} r^2 \ddot{\vartheta}(l,t)\delta\vartheta(l,t)\mathrm{d}t \tag{36}$$

III:

$$- \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l G I_p \vartheta'\delta\vartheta'\mathrm{d}x\mathrm{d}t = - \int_{t_0}^{t_1} \left[G I_p \vartheta'\delta\vartheta\right]_0^l \mathrm{d}t + \dots$$

$$\dots + \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l G I_p \vartheta''\delta\vartheta\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{37}$$

$$\left.\begin{matrix} \vartheta(0) = 0 \\ \Downarrow \\ \delta\vartheta(0) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \qquad = - \int_{t_0}^{t_1} G I_p \vartheta'(l,t)\delta\vartheta(l,t)\mathrm{d}t + \dots$$

$$\dots + \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l G I_p \vartheta''\delta\vartheta\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{38}$$

Ins Prinzip von Hamilton einsetzen und sortieren:

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \left(-\varrho I_p \ddot{\vartheta} + G I_p \vartheta''\right)\delta\vartheta\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \dots$$

$$\dots + \int_{t_0}^{t_1} \left[-\frac{m}{2} r^2 \ddot{\vartheta}(l,t) - G I_p \vartheta'(l,t)\right]\delta\vartheta(l,t)\mathrm{d}t = 0 \tag{39}$$

Da die Variationen $\delta\vartheta$ und $\delta\vartheta(l,t)$ unabhängig voneinander sind, müssen die Terme davor verschwinden, um die Gleichung zu erfüllen:

$$\overset{(39)}{\Rightarrow} \qquad \varrho I_p \ddot{\vartheta} = G I_p \vartheta'' \tag{40}$$

$$\Rightarrow \qquad \ddot{\vartheta} = c^2 \vartheta'' \qquad \text{mit} \qquad c^2 = \frac{G}{\varrho} \tag{41}$$

Das ist die Bewegungsdifferentialgleichung.

$$\overset{(39)}{\Rightarrow} \qquad -\frac{m}{2} r^2 \ddot{\vartheta}(l,t) - G I_p \vartheta'(l,t) = 0 \tag{42}$$

Das ist die dynamische Randbedingung.

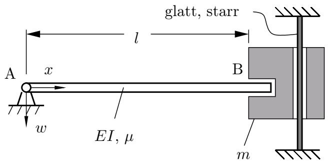
Hausaufgabe

Aufgabe 84

Ein Balken (Länge l, Massebelegung μ, Biegesteifigkeit EI) ist bei A gelenkig gelagert und bei B in eine Hülse gesteckt, die dem Balken dort eine horizontale Tangente aufzwingt. Die Hülse (Masse m) kann auf einer starren Stange in vertikaler Richtung reibungsfrei gleiten. Der Balken schwingt ausschließlich in Querrichtung.

Leite die Bewegungsdifferentialgleichungen und die dynamischen Randbedingungen mit dem Prinzip der kleinsten Wirkung her.

Geg.: EI, μ, l, m



Kinetische Energie:

$$T = \int_0^l \frac{\mu}{2}\dot{w}(x,t)^2 dx + \frac{m}{2}\dot{w}(l,t)^2 \tag{43}$$

potentielle Energie:

$$U = \int_0^l \frac{1}{2} EI\, w''^2(x,t)\mathrm{d}x \tag{44}$$

Lagrange-Funktion

$$L = T - U \tag{45}$$

Hamilton-Prinzip (ohne Arbeit nichtkonservativer Kräfte)

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt \overset{!}{=} 0 \tag{46}$$

$$\delta\Big(\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\frac{\mu}{2}\int_0^l \dot{w}(x,t)^2 dx + \frac{m}{2}\dot{w}(l,t)^2 - \frac{EI}{2}\int_0^l w''(x,t)^2 dx\Big\}dt\Big) = 0 \tag{47}$$

$$\frac{\mu}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l \delta\big(\dot{w}(x,t)^2\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2}\delta\big(\dot{w}(l,t)^2\big)\mathrm{d}t - \frac{EI}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l \delta\big(w''(x,t)^2\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0 \tag{48}$$

$$\mu\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l \dot{w}(x,t)\delta\dot{w}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + m\int_{t_1}^{t_2}\dot{w}(l,t)\delta\dot{w}(l,t)\mathrm{d}t - EI\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l w''(x,t)\delta w''(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0 \tag{49}$$

Durch Vertauschen der Integrationsreihenfolge wird der erste Summand zu $\mu\int_0^l A\,\mathrm{d}x$ mit

$$A = \int_{t_1}^{t_2}\dot{w}(x,t)\delta\dot{w}(x,t)\,dt \qquad \Big|\text{partielle Integration} \tag{50}$$

$$= \Big[\dot{w}(x,t)\delta w(x,t)\Big]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\ddot{w}(x,t)\,\delta w(x,t)\,\mathrm{d}t \tag{51}$$

Die Variation $\delta w(x,t)$ ist am Anfang und am Ende des Integrationsintervals gleich Null: $\delta w(x,t_1) = \delta w(x,t_2) = 0$

$$A = -\int_{t_1}^{t_2}\ddot{w}(x,t)\,\delta w(x,t)\,\mathrm{d}t \tag{52}$$

Aus dem zweiten Summanden wird durch partielle Integration

$$m\int_{t_1}^{t_2}\dot{w}(l,t)\delta\dot{w}(l,t)\mathrm{d}t = \tag{53}$$

$$= m\Big\{\Big[\dot{w}(l,t)\delta w(l,t)\Big]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\ddot{w}(l,t)\delta w(l,t)\mathrm{d}t\Big\} \tag{54}$$

$$= -m\int_{t_1}^{t_2}\ddot{w}(l,t)\delta w(l,t)\mathrm{d}t \tag{55}$$

Der dritte Summand lautet $-EI\int_{t_1}^{t_2} B\,\mathrm{d}t$ mit

$$B = \int_0^l w''(x,t)\delta w''(x,t)\,\mathrm{d}x \qquad \Big|\text{partielle Integration} \tag{56}$$

$$= \Big[w''(x,t)\delta w'(x,t)\Big]_0^l - \Big[w'''(x,t)\delta w(x,t)\Big]_0^l + \dots$$
$$\dots + \int_0^l w''''(x,t)\,\delta w(x,t)\,\mathrm{d}x \tag{57}$$

Die geometrischen Randbedingungen $w(0,t) = 0$ und $w'(l,t) = 0$ gelten auch für die Variation δw : $\delta w(0,t) = 0,\ \delta w'(l,t) = 0$.

Eingesetzt in (57) ergibt sich:

$$B = -\,w''(0,t)\delta w'(0,t) - w'''(l,t)\delta w(l,t) + \int_0^l w''''(x,t)\,\delta w(x,t)\,\mathrm{d}x \tag{58}$$

Alles eingesetzt in (49), Integrationen wieder vertauscht und zusammengefaßt:

$$\int_{t_1}^{t_2}\Big\{-\mu\int_0^l \ddot{w}(x,t)\delta w(x,t)\mathrm{d}x - \dots$$
$$\dots - EI\int_0^l w''''(x,t)\delta w(x,t)\mathrm{d}x - m\ddot{w}(l,t)\delta w(l,t) + \dots$$
$$\dots + EIw''(0,t)\delta w'(0,t) + EI\,w'''(l,t)\delta w(l,t)\Big\}\mathrm{d}t = 0 \tag{59}$$

Das Integral kann für ein beliebiges Interval $[t_1, t_2]$ nur Null werden, wenn der Integrand gleich Null ist: $\hookrightarrow \{...\} = 0$

Die drei in Gleichung (59) vorkommenden Variationsgrößen $\delta w(x,t)$, $\delta w(l,t)$ und $\delta w'(0,t)$ werden unabhängig voneinander beliebig gewählt. Damit $\{...\} = 0$ muß deshalb gelten:

$$-\mu\int_0^l \ddot{w}(x,t)\delta w(x,t)\mathrm{d}x - EI\int_0^l w''''(x,t)\delta w(x,t)\mathrm{d}x = 0 \tag{60}$$

$$-m\ddot{w}(l,t)\delta w(l,t) + EI\, w'''(l,t)\delta w(l,t) = 0 \tag{61}$$
$$EI\, w''(0,t)\delta w'(0,t) = 0 \tag{62}$$

Da die Variationen (wie gesagt) beliebig sind, ergeben sich aus (61) und (62) die beiden dynamischen Randbedingungen

$$m\ddot{w}(l,t) = EI\, w'''(l,t) \tag{63}$$
$$w''(0,t) = 0 \tag{64}$$

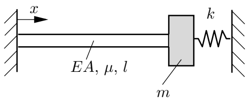
Aus Gleichung (60) gewinnt man die Bewegungsdifferentialgleichungen:

$$\int_0^l \Big[\mu\ddot{w}(x,t) + EI\, w''''(x,t)\Big]\delta w(x,t)\mathrm{d}x = 0 \tag{65}$$

Wenn $\delta w(x,t)$ eine beliebige Funktion ist (mit den Randbedingungen kompatibel), dann kann das Integral nur dann in jedem Fall Null sein, wenn [...] = 0:

$$\mu\ddot{w}(x,t) + EI\, w''''(x,t) = 0 \tag{66}$$

Aufgabe 90



Ein massebehafteter elastischer Stab (Dehnsteifigkeit EA, Massebelegung μ, Länge l) ist am linken Rand ($x = 0$) fest eingespannt und trägt am rechten Rand ($x = l$) eine Punktmasse m. Die Punktmasse ist außerdem über eine Feder (Steifigkeit k) an die Umgebung gekoppelt.
Die Feder sei entspannt, wenn der Stab unverformt ist. Es werden ausschließlich Längsschwingungen $u(x,t)$ betrachtet.

(a) Wie lautet die *geometrische* Randbedingung für das System?

(b) Berechnen Sie die kinetische Energie T und die potentielle Energie U des Gesamtsystems.

(c) Formulieren Sie das Prinzip von Hamilton für das untersuchte System.

(d) Leiten Sie die Bewegungsdifferentialgleichung und die *dynamische* Randbedingung her.

Geg.: m, k, l, $EA =$ konst., $\mu := \rho A =$ konst.,

(a) Die einzige geometrische Randbedingung und die dazugehörige Bedingung für die Variation lautet:

$$\Rightarrow \quad u(0,t) = 0 \qquad \forall t \tag{67}$$
$$\delta u(0,t) = 0 \qquad \forall t \tag{68}$$

(b) Die Energieausdrücke lauten:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \mu\dot{u}^2(x,t)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}m\dot{u}^2(l,t) \tag{69}$$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EA\dot{u}'^2(x,t)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}ku^2(l,t) \tag{70}$$

(c) Das Prinzip von Hamilton lautet:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(T-U)\mathrm{d}t = 0 \tag{71}$$

Eingesetzt:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\frac{1}{2}\int_0^l \left(\mu\dot{u}^2(x,t) - EAu'^2(x,t)\right)\mathrm{d}x + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{2}m\dot{u}^2(l,t) - \frac{1}{2}ku^2(l,t)\mathrm{d}t = 0 \tag{72}$$

(d) Aus (72) ergeben sich 4 Summanden die im folgenden einzeln behandelt werden:

$$\mathbf{I} + \mathbf{II} + \mathbf{III} + \mathbf{IV} = 0 \tag{73}$$

$$\mathbf{I} = \delta\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \mu\dot{u}^2(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{74}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \mu\dot{u}(x,t)\delta\dot{u}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{75}$$

Mit partieller Integration und der Bedingung das die Variationen $\delta u(x,t_0)$ und $\delta u(x,t_1)$ verschwinden:

$$\mathbf{I} = \int_0^l \left[\left[\mu\dot{u}(x,t)\delta u(x,t)\right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \mu\ddot{u}(x,t)\delta u(x,t)\mathrm{d}t \right] \mathrm{d}x$$

$$= -\int_0^l \int_{t_0}^{t_1} \mu\ddot{u}(x,t)\delta u(x,t)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \tag{76}$$

$$\mathbf{II} = -\delta\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l EAu'^2(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{77}$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l EAu'(x,t)\delta u'(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{78}$$

Mit partieller Integration und mit Ausnutzung der Randbedingung $\delta u(0,t) = 0$:

$$\mathbf{II} = -\int_{t_0}^{t_1} \left[\left[EAu'(x,t)\delta u(x,t)\right]_0^l - \dots \right.$$

$$\left. \dots - \int_0^l EAu''(x,t)\delta u(x,t)\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}t \tag{79}$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1} EAu'(l,t)\delta u(l,t)\mathrm{d}t + \dots$$

$$\dots + \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l EAu''(x,t)\delta u(x,t)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \tag{80}$$

$$\mathbf{III} = \delta\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} m\dot{u}^2(l,t)\mathrm{d}t \tag{81}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} m\dot{u}(l,t)\delta\dot{u}(l,t)\mathrm{d}t \tag{82}$$

Mit partieller Integration und der Bedingung das die Variationen $\delta u(l,t_0)$ und $\delta u(l,t_1)$ verschwinden:

$$\mathbf{III} = \left[m\dot{u}(l,t)\delta u(l,t)\right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} m\ddot{u}(l,t)\delta u(l,t)\mathrm{d}t \tag{83}$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1} m\ddot{u}(l,t)\delta u(l,t)\mathrm{d}t \tag{84}$$

$$\mathbf{IV} = -\delta\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} ku^2(l,t)\mathrm{d}t \tag{85}$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1} ku(l,t)\delta u(l,t)\mathrm{d}t \tag{86}$$

Eingesetzt in (73):

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\int_0^l \left(-\mu\ddot{u}(x,t) + EAu''(x,t)\right)\delta u(x,t)\mathrm{d}x + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \left(-EAu'(l,t) - m\ddot{u}(l,t) - ku(l,t)\right)\delta u(l,t) \right] \mathrm{d}t = 0 \tag{87}$$

Die Variationen $\delta u(x,t)$ und $\delta u(l,t)$ sind nicht Null und unterschiedlich, deswegen müssen die jeweiligen Klammerausdrücke separat Null werden:

$$-\mu\ddot{u}(x,t) + EAu''(x,t) = 0 \tag{88}$$

$$EAu'(l,t) + m\ddot{u}(l,t) + ku(l,t) = 0 \qquad \forall t \tag{89}$$

Gleichung (88) ist die beschreibende Feldgleichung und (89) die dynamische Randbedingung.