Tutorium

Aufgabe 53

Anpassen an die Randbedingungen
Die geometrischen Randbedingungen sind

$$w(0) = 0 \quad \text{und} \quad w'(0) = 0. \tag{1}$$

Daraus folgt

$$a_0 = -a_2 \quad \text{und} \quad a_1 = 0, \tag{2}$$

die angepasste Ansatzfunktion lautet

$$w(x) = a_2 \left[\cosh\left(\frac{x}{l}\right) - 1\right] \tag{3}$$

und die Ableitungen

$$w'(x) = \frac{a_2}{l}\sinh\left(\frac{x}{l}\right) \quad \text{und} \quad w''(x) = \frac{a_2}{l^2}\cosh\left(\frac{x}{l}\right). \tag{4}$$

Arbeit der äußeren Kräfte

$$\begin{aligned} A &= \underline{M}_0 \cdot \underline{\varphi} = -M_0 \underline{e}_y \cdot (-w'(2l)\underline{e}_y) \\ &= M_0 w'(2l) = M_0 \frac{a_2}{l}\sinh(2) \end{aligned} \tag{5}$$

Formänderungsenergie

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\int_0^{2l} EI{w''}^2(x)dx + \frac{1}{2}cw^2(l) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2l} EI\frac{{a_2}^2}{l^4}\cosh^2\left(\frac{x}{l}\right)dx + \frac{1}{2}c{a_2}^2\left[\cosh(1)-1\right]^2 \end{aligned} \tag{6}$$

Mit

$$\begin{aligned} \cosh^2\left(\frac{x}{l}\right) &= \left(\frac{e^{x/l} + e^{-x/l}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2x/l} + 2 + e^{-2x/l}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\cosh\left(\frac{2x}{l}\right) + 1\right] \end{aligned} \tag{7}$$

folgt weiter

$$\begin{aligned} W &= \frac{EI{a_2}^2}{4l^4}\left[\frac{l}{2}\sinh\left(\frac{2x}{l}\right) + x\right]_0^{2l} + \frac{c{a_2}^2}{2}\left[\cosh(1)-1\right]^2 \\ &= \frac{EI{a_2}^2}{4l^4}\left[\frac{l}{2}\sinh(4) + 2l\right] + \frac{c{a_2}^2}{2}\left[\cosh(1)-1\right]^2 \end{aligned} \tag{8}$$

Variation des elastischen Potentials
Im Gleichgewicht nimmt das elastische Potential ein Extremum an. Die Bedingung dafür ist

$$\delta\Pi = \delta(W - A) = 0 \tag{9}$$

und da a_2 die einzige generalisierte Koordinate ist, muss gelten

$$\frac{\partial\Pi}{\partial a_2}\delta a_2 = 0 \quad \text{also} \quad \frac{\partial\Pi}{\partial a_2} = 0. \tag{10}$$

Aus Gleichung (10) in Verbindung mit (8) folgt

$$a_2 = \frac{M_0 l^2 \sinh(2)}{EI\left(\frac{1}{4}\sinh(4)+1\right) + cl^3\left(\cosh(1)-1\right)^2} \tag{11}$$

Nach Einsetzen in (3) und Auswerten an der Stelle $x = 2l$ erhalten wir die Durchsenkung des Balkens am rechten Ende:

$$w(x = 2l) = \frac{M_0 l^2 \sinh(2)\left(\cosh(2)-1\right)}{EI\left(\frac{1}{4}\sinh(4)+1\right) + cl^3\left(\cosh(1)-1\right)^2}. \tag{12}$$

Aufgabe 63

(a) Ansatzfunktion:
Zuerst prüfen wir, ob die vorgegebene Ansatzfunktion

$$u(x,t) = x^2(3l - 2x)q(t) \tag{13}$$

die geometrischen Randbedingungen erfüllt. Hier ist das lediglich eine Bedingung für die Verschiebung am linken Rand:

$$u(x = 0, t) = 0 \tag{14}$$

Diese geometrische Randbedingung ist erfüllt.

(Allerdings ist auch die erste Ableitung am linken Rand Null. Das spiegelt nicht das tatsächliche Verhalten wider. Die Ordnung des Ansatzes ist zu hoch gewählt.)

(b) Mit diesem Ansatz werden nun kinetische und potentielle Energie formuliert.

Kinetische Energie:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\int_0^l \rho A\dot{u}(x,t)^2 dx = \frac{1}{2}\rho A\dot{q}^2\int_0^l x^4(3l-2x)^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\rho A\dot{q}^2\int_0^l (9l^2x^4 - 12lx^5 + 4x^6)dx \\ &= \frac{13}{70}\rho A l^7 \dot{q}^2 \end{aligned} \tag{15}$$

Potentielle Energie:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\int_0^l EAu'(x,t)^2 dx = \frac{1}{2}EAq^2\int_0^l 36x^2(l-x)^2 dx \\ &= 18EAq^2\int_0^l (l^2x^2 - 2lx^3 + x^4)dx \\ &= \frac{3}{5}EAl^5q^2 \end{aligned} \tag{16}$$

Somit ist die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} L &= K - U \\ &= \frac{13}{70}\rho A l^7\dot{q}^2 - \frac{3}{5}EAl^5q^2. \end{aligned} \tag{17}$$

(c) Nun wird für dieses System die Lagrange-Gleichung 2.Art aufgestellt. Da ein eingliedriger Ansatz vorgegeben ist, existiert auch nur eine generalisierte Koordinate q:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} &= 0, \quad \text{also} \\ \frac{13}{35}\rho A l^7 \ddot{q} + \frac{6}{5} E A l^5 q &= 0, \quad \text{bzw.} \\ \ddot{q} + \frac{42E}{13\rho l^2} q &= 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Das ist offensichtlich die Bewegungsgleichung eines 1-Massen-Schwingers, aus der man die Näherungslösung für die erste Eigenkreisfrequenz direkt ablesen kann:

$$\omega_1 = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{42E}{13\rho}}. \tag{19}$$

Rayleigh-Quotient:
Offenbar erhält man dieses Ergebnis direkt, wenn man den Rayleigh-Quotienten

$${\omega_1}^2 = \frac{\int_0^l EA\varphi'^2(x)dx}{\int_0^l \rho A \varphi^2(x)dx} \tag{20}$$

auswertet. Dabei ist $\varphi(x) = x^2(3l - 2x)$ der ortsabhängige Faktor der Ansatzfunktion.

Hausaufgaben

Aufgabe 52

Die Ansatzfunktion wird an die geometrischen Randbedingungen angepasst:

$$\begin{aligned} w(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_0 = -a_1 \\ w'(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_2 = 0 \\ w(2l) = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_0 = -a_1 \\ w'(2l) = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad w(x) = a_1\left[\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) - 1\right] \tag{21}$$

$$\Rightarrow \quad w'(x) = -\frac{\pi}{l} a_1 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \tag{22}$$

$$\Rightarrow \quad w''(x) = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a_1 \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \tag{23}$$

Formänderungsenergie:

$$\begin{aligned} W &= W^{Balken} + W^{Feder} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2l} EI w''^2(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}c_F w^2(l) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2l} EI\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 a_1^2 \cos^2\left(\frac{\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x \\ &\quad + \frac{1}{2}c_F a_1^2\left[\cos\left(\frac{\pi l}{l}\right) - 1\right]^2 \\ &= \frac{1}{2}EI\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 a_1^2\left[\frac{1}{2}x + \frac{l}{2\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)\right]_0^{2l} \\ &\quad + \frac{1}{2}c_F a_1^2 4 \end{aligned}$$

$$W = \frac{1}{2}EI\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 a_1^2 l + 2c_F a_1^2 \tag{24}$$

Arbeit der äußeren Kräfte:

$$A = Fw(l) = Fa_1(\cos\pi - 1) = -2Fa_1 \tag{25}$$

Elastisches Potential:

$$\Pi = \frac{1}{2}EI\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 a_1^2 l + 2c_F a_1^2 + 2Fa_1 \tag{26}$$

Variation des elastischen Potentials:

$$\delta\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial a_1}\delta a_1 \stackrel{!}{=} 0$$

$$(\delta a_1 \neq 0) \Rightarrow \left[EIl\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 + 4c_F\right]a_1 + 2F \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow a_1 = -\frac{2F}{4c_F + EIl\left(\frac{\pi}{l}\right)^4} \tag{27}$$

Näherungslösung für Biegelinie:

$$w(x) = \frac{2F}{4c_F + EIl\left(\frac{\pi}{l}\right)^4}\left[1 - \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)\right] \tag{28}$$

Aufgabe 61

1. Überprüfen auf Erfüllung der Randbedingungen.

$$\omega(x=0,t)=0 \tag{29}$$
$$\omega(x=l,t)=0 \tag{30}$$
$$\omega'(x=0,t)=0 \tag{31}$$

Die Ansatzfunktion erfüllt die geometrischen Randbedingungen!
Sei $\varphi(x) := x^2(l-x)^2$ der ortsabhängige Faktor der Ansatzfunktion w.

2. Substitution $\eta = \frac{x}{l}$

$$\varphi(\eta) = l^4\big(\frac{x}{l}\big)^2\big(1-\frac{x}{l}\big)^2 = l^4\big(\eta^4 - 2\eta^3 + \eta^2\big) \tag{32}$$

3. Rayleigh-Quotient für Biegung

Wird die Bewegungsgleichung mit dem Lagrange-Formalismus 2. Art aufgestellt und ein eingliedriger Lösungsansatz verwendet, so kann die Näherungslösung für die erste Eigenkreisfrequenz durch Vergleich mit der Bewegungsgleichung eines 1-Massen-Schwingers direkt abgelesen werden:

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^1 EI\varphi''^2(\eta)d\eta}{\int_0^1 \rho A\varphi^2(\eta)d\eta} =: \frac{Z}{N}\,\frac{EI}{\rho A}. \tag{33}$$

Mit

$$\varphi''(\eta) = l^2(12\,\eta\,(\eta-1)+2) \tag{34}$$

sowie

$$Z = \int_0^1 \varphi''^2(\eta)d\eta \tag{35}$$
$$= 144\,l^5\Big(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{4}{9}-\frac{1}{6}+\frac{1}{36}\Big) = \frac{4}{5}\,l^5 \tag{36}$$

und

$$N = \int_0^1 \varphi^2(\eta)d\eta \tag{37}$$
$$= l^9\Big(\frac{1}{9}-\frac{1}{2}+\frac{6}{7}-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\Big) = \frac{1}{630}\,l^9 \tag{38}$$

folgt daraus:

$$\omega_1 = \frac{22.45}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{39}$$

4. Warum große Abweichung von der „exakten“ Lösung?

Die Ansatzfuktion liefert für die Stelle

$$x = l\ :\ \omega'(x=l) = 0,$$

dies gilt jedoch nur für den auch rechts eingespannten Balken. Die obige Lösung entspricht in sehr guter Näherung der ersten Eigenfrequenz des beidseitig eingespannten Balkens, hier ist die „exakte“ Lösung.

$$\omega_1 = \frac{22.4}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{40}$$

Die vorgegebene Ansatzfunktion ist offenbar für das konkrete Problem weniger gut geeignet.