

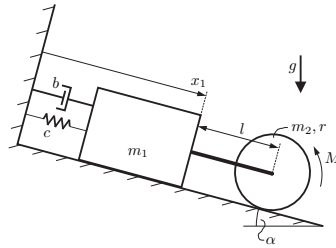
Tutorium

Aufgabe 47

Auf einer schiefen Ebene (Neigungswinkel α) befindet sich ein System aus einem Klotz (Masse m_1) und einem Vollzylinder (Masse m_2 , Radius r), die durch eine starre Stange (Länge l , Masse vernachlässigbar) miteinander verbunden sind.

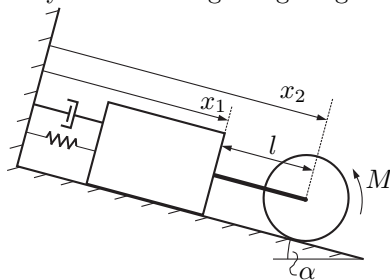
Der Klotz gleitet reibungsfrei über den Boden und ist mittels einer Feder (Federsteifigkeit c , entspannt bei $x_1 = a$) und eines linearen Dämpfers (Dämpfungskonstante b) an die Umgebung gekoppelt. Die Rolle führt eine reine Rollbewegung aus. An ihr greift außerdem das Moment M an.

Mittels des Lagrange-Formalismus sollen die Bewegungsgleichung des Systems und die Kraft in der Stange berechnet werden. Geg.: $g, m_1, m_2, r, l, a, \alpha, b, c, M$



- (a) Wählen Sie eine geeignete generalisierte Koordinate x_2 zusätzlich zu x_1 , so dass mit dem Lagrange-Formalismus die Stangenkraft bestimmt werden kann. Erklären Sie die Bedeutung dieser Koordinate und geben Sie die Zwangsbedingung(en) an.
- (b) Stellen Sie die Lagrange-Funktion in den beiden generalisierten Koordinaten x_1 und x_2 auf.
- (c) Beschreiben Sie den Einfluss des Dämpfers und des Momentes M mittels Dissipationsfunktion bzw. generalisierter Kraft.
- (d) Stellen Sie die Lagrange-Gleichungen 1. Art auf.
- (e) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung(en) und die Kraft in der Stange.

(a) Die zweite Koordinate x_2 ist die Schwerpunktsverschiebung des Zylinders entlang der geneigten Ebene.



Die Zwangsbedingung lautet dann

$$g(x_1, x_2) = x_2 - x_1 - l = 0 \tag{1}$$

(b) Das System besitzt die potentielle Energie

$$U = \frac{1}{2}c(x_1 - a)^2 - m_1 g x_1 \sin \alpha - m_2 g x_2 \sin \alpha \tag{2}$$

und die kinetische Energie

$$K = \frac{1}{2}m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}\Theta \dot{\varphi}^2. \tag{3}$$

Dabei sind

$$\Theta = \frac{1}{2}m_2 r^2 \text{ das Massenträgheitsmoment und} \tag{4}$$

$$\varphi = -\frac{x_2}{r} \text{ der Drehwinkel} \tag{5}$$

des Zylinders. Somit gilt

$$K = \frac{1}{2}m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{3}{4}m_2 \dot{x}_2^2 \tag{6}$$

und die Lagrange-Funktion lautet

$$L = K - U$$

$$L = \frac{1}{2}m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{3}{4}m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}c(x_1 - a)^2 + m_1 g x_1 \sin \alpha + m_2 g x_2 \sin \alpha. \tag{7}$$

(c) Der Dämpfer wird in der Dissipationsfunktion berücksichtigt

$$D = \frac{1}{2}b\dot{x}_1^2, \tag{8}$$

der Einfluss des äußeren Moments wird als generalisierte Kraft betrachtet

$$\delta W = M \delta \varphi$$

$$= M \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \delta x_2 \right)$$

$$= 0 \delta x_1 - \frac{M}{r} \delta x_2. \tag{9}$$

Somit sind

$$Q_{x_1} = 0 \quad \text{und} \quad Q_{x_2} = -\frac{M}{r}. \tag{10}$$

(d) Die Lagrange-Gleichungen 1. Art lauten

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} = Q_{x_i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}, \quad i \in \{1; 2\} \tag{11}$$

Durch Auswertung der Ableitungen ergeben sich die Gleichungen

$$m_1 \ddot{x}_1 + b \dot{x}_1 + c(x_1 - a) = m_1 g \sin \alpha - \lambda \tag{12}$$

$$\frac{3}{2}m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g \sin \alpha + \lambda - \frac{M}{r}. \tag{13}$$

(e) Zur Bestimmung der Bewegungsgleichung wird nun benutzt, dass tatsächlich

$$x_2 = x_1 + l \quad \text{also} \quad \ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 \tag{14}$$

gilt. Mit dieser Beziehung folgt aus (12)+(13) unmittelbar die Bewegungsgleichung

$$(m_1 + \frac{3}{2}m_2)\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + c(x_1 - a) = (m_1 + m_2)g \sin \alpha - \frac{M}{r}. \tag{15}$$

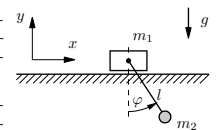
Analog folgt z.B. aus $\frac{3}{2}m_2 \cdot (12) - m_1 \cdot (13)$ nach kurzer Umformung

$$\lambda = \frac{-b\dot{x}_1 - c(x_1 - a) + \frac{1}{3}m_1 g \sin \alpha + \frac{2m_1}{3m_2} \frac{M}{r}}{1 + \frac{2m_1}{3m_2}} =: S, \tag{16}$$

die Kraft in der Stange.

Aufgabe 41

Zwischen der Masse m_1 und der horizontalen Ebene besteht Gleitreibung. Der Betrag der Gleitreibungskraft wird über die Zwangskraft des Pendelfadens von der Schwingung der Masse m_2 beeinflusst.



Ermitteln Sie mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen 1. Art sowohl die Normalkraft zwischen m_1 und der Ebene als auch die Bewegungsdifferentialgleichungen des Systems (Die Zwangskraft des Pendelfadens ist nicht gesucht!).

Geg.: m_1, m_2, l, g, μ

Gesucht: Bewegungsdifferentialgleichungen und Normalkraft zwischen m_1 und der Bahn.

Die Normalkraft unterbindet die Vertikalbewegung der Masse m_1 . Diese wird jetzt zugelassen, dafür aber die entsprechende Zwangskraft sowie die Zwangsbedingung hinzugezogen!

Kinematik: Seien $\underline{r}_1 = x_1 \underline{e}_x + y_1 \underline{e}_y$ und \underline{r}_2 die Ortsvektoren zu den Massen m_1 bzw. m_2 . Dann ist:

$$\underline{r}_2 = (x_1 + l \sin \varphi) \underline{e}_x + (y_1 - l \cos \varphi) \underline{e}_y \quad (17)$$

$$\underline{v}_2 = (\dot{x}_1 + l \cos \varphi \dot{\varphi}) \underline{e}_x + (\dot{y}_1 + l \sin \varphi \dot{\varphi}) \underline{e}_y \quad (18)$$

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \quad (19)$$

also:

$$T(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{\varphi}, \varphi) = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 \left[(\dot{x}_1 + l \cos \varphi \dot{\varphi})^2 + (\dot{y}_1 + l \sin \varphi \dot{\varphi})^2 \right] \quad (20)$$

Potentielle Energie:

$$U = +m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = (m_1 + m_2) g y_1 - m_2 g l \cos \varphi \quad (21)$$

Dissipationsfunktion:

$$D = \mu N |\dot{x}_1| \quad (22)$$

Zwangsbedingung:

$$g(y_1) = y_1 = 0 \quad (23)$$

Lagrangefunktion:

$$L = T - U = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 \left[(\dot{x}_1 + l \cos \varphi \dot{\varphi})^2 + (\dot{y}_1 + l \sin \varphi \dot{\varphi})^2 \right] - (m_1 + m_2) g y_1 + m_2 g l \cos \varphi \quad (24)$$

Ableitungen:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 + m_2 (\dot{x}_1 + l \cos \varphi \dot{\varphi}) \quad (25)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + m_2 (-l \sin \varphi \dot{\varphi}^2 + l \cos \varphi \ddot{\varphi}) \quad (26)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = (\text{sgn} \dot{x}_1) \mu N; \quad \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0 \quad (27)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} = m_1 \dot{y}_1 + m_2 (\dot{y}_1 + l \sin \varphi \dot{\varphi}) \quad (28)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} = (m_1 + m_2) \ddot{y}_1 + m_2 (l \cos \varphi \dot{\varphi}^2 + l \sin \varphi \ddot{\varphi}) \quad (29)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = -(m_1 + m_2) g; \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_1} = 0; \quad \frac{\partial g}{\partial y_1} = 1 \quad (30)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 \left[(\dot{x}_1 + l \cos \varphi \dot{\varphi}) l \cos \varphi + (\dot{y}_1 + l \sin \varphi \dot{\varphi}) l \sin \varphi \right] = m_2 l (\dot{x}_1 \cos \varphi + \dot{y}_1 \sin \varphi + l \dot{\varphi}) \quad (31)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l \left[\ddot{x}_1 \cos \varphi - \dot{x}_1 \sin \varphi \dot{\varphi} + \ddot{y}_1 \sin \varphi + \dot{y}_1 \cos \varphi \dot{\varphi} + l \ddot{\varphi} \right] \quad (32)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = m_2 \left[(\dot{x}_1 + l \cos \varphi \dot{\varphi}) (-l \sin \varphi) + (\dot{y}_1 + l \sin \varphi \dot{\varphi}) l \cos \varphi \right] - m_2 g l \sin \varphi = m_2 (-\dot{x}_1 l \sin \varphi \dot{\varphi} + \dot{y}_1 l \cos \varphi \dot{\varphi}) - m_2 g l \sin \varphi \quad (33)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}} = 0; \quad \frac{\partial g}{\partial \varphi} = 0 \quad (34)$$

Lagrange- Formalismus (1. Art):

Die Lagrange-Gleichungen 1. Art lauten allgemein:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i + \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial q_i}. \quad (35)$$

Bezüglich der drei generalisierten Koordinaten $q_i \in \{x, y, \varphi\}$ erhält man die drei Lagrange-Gleichungen:

$$L_x: \quad (m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + m_2 (-l \sin \varphi \dot{\varphi}^2 + l \cos \varphi \ddot{\varphi}) + (\text{sgn} \dot{x}_1) \mu N = 0 \quad (36)$$

$$L_y: \quad (m_1 + m_2) \ddot{y}_1 + m_2 (l \cos \varphi \dot{\varphi}^2 + l \sin \varphi \ddot{\varphi}) + (m_1 + m_2) g = \lambda \equiv N \quad (37)$$

$$L_\varphi: \quad m_2 l (\ddot{x}_1 \cos \varphi + \ddot{y}_1 \sin \varphi + l \ddot{\varphi}) + m_2 g l \sin \varphi = 0 \quad (38)$$

Einsetzen der Zwangsbedingung:

Mit der Zwangsbedingung

$$y_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{y}_1 = 0 \quad ; \quad \ddot{y}_1 = 0 \quad (39)$$

folgt daraus schließlich:

$$L_y: \quad N = m_2 (l \cos \varphi \dot{\varphi}^2 + l \sin \varphi \ddot{\varphi}) + (m_1 + m_2) g \quad (40)$$

$$L_\varphi: \quad \ddot{x}_1 \cos \varphi + l \ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0 \quad (41)$$

L_x : wie oben, jedoch kann N nun eingesetzt werden

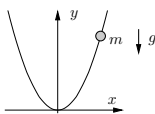
Hausaufgaben

Aufgabe 43

Auf einem ruhenden, parabelförmig gebogenen Draht rutscht eine Perle mit Reibung. Die Schwerkraft wirkt in negative y -Richtung.

Stellen Sie die Bewegungsdifferentialgleichung auf und berechnen Sie die Zwangskraft mit Hilfe der LAGRANGEgleichungen 1. Art.

Geg.: $m, g, y(x) = ax^2, a = \text{const.}, \mu$



Kinetische Energie: $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ (42)

Potentielle Energie: $U = mgy$ (43)

Dissipationsfunktion: $D = \mu N |\underline{v}_{rel}|$
 $= \mu N \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ (44)

N.R.: $\underline{v}_m = x\underline{e}_x + y\underline{e}_y$
 $\underline{v}_m = \dot{x}\underline{e}_x + \dot{y}\underline{e}_y$
 $|\underline{v}_m| = |\underline{v}_{rel}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$

Zwangsbedingung: $g(x, y) = y - ax^2 = 0$ (45)

LANGRANGE-Funktion: $L = T - U$
 $= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$ (46)

Ableitungen:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \mu N \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = -2ax$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = m\ddot{y} \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -mg$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{y}} = \mu N \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 1$$

LANGRANGE-Gleichungen 1. Art:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} - 0 + \mu N \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = -2\lambda ax =: N_x$$
 (47)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}$$

$$\Rightarrow m\ddot{y} + mg + \mu N \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \lambda =: N_y$$
 (48)

Aus der Zwangsbedingung (45) folgt:

$$y = ax^2 \Rightarrow \dot{y} = 2ax\dot{x} \Rightarrow \ddot{y} = 2a\dot{x}^2 + 2ax\ddot{x}$$
 (49)

Einsetzen von \dot{y} aus (49) in (47):

$$m\ddot{x} + \mu N \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + 4a^2x^2\dot{x}^2}} = -2\lambda ax$$

$$m\ddot{x} + \mu N \frac{1}{\sqrt{1 + 4a^2x^2}} \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} = -2\lambda ax =: N_x$$
 (50)

Einsetzen von \dot{y} und \ddot{y} aus (49) in (48):

$$2am(\dot{x}^2 + x\ddot{x}) + mg + \mu N \frac{2ax\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + 4a^2x^2\dot{x}^2}} = \lambda$$

$$2am(\dot{x}^2 + x\ddot{x}) + mg + \mu N \frac{2ax}{\sqrt{1 + 4a^2x^2}} \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} = \lambda =: N_y$$
 (51)

Nun ist aber

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = \sqrt{\lambda^2 + (-2ax\lambda)^2}$$

$$= \sqrt{1 + 4a^2x^2} \lambda$$
 (52)

$$\Rightarrow \frac{N}{\sqrt{1 + 4a^2x^2}} = \lambda$$
 (53)

Einsetzen von (53) in (50) und (51):

$$m\ddot{x} + \mu\lambda \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} = -2ax\lambda$$
 (54)

$$2am(\dot{x}^2 + x\ddot{x}) + mg + \mu 2ax\lambda \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} = \lambda$$
 (55)

mit $\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} = (\text{sign } \dot{x})^1$ folgt aus (54):

$$m\ddot{x} = -[2ax + \mu(\text{sign } \dot{x})] \lambda$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{m\ddot{x}}{2ax + \mu(\text{sign } \dot{x})}$$
 (56)

Einsetzen von (56) in (55):

$$2am(\dot{x}^2 + x\ddot{x}) + mg =$$

$$= -\frac{m\ddot{x}}{2ax + \mu(\text{sign } \dot{x})} \cdot (1 - \mu 2ax \cdot (\text{sign } \dot{x}))$$

$$(2a\dot{x}^2 + g) m \cdot [2ax + \mu(\text{sign } \dot{x})] +$$

$$+ 2amx\ddot{x}[\mu(\text{sign } \dot{x}) + 2ax] = m\ddot{x} [2ax\mu(\text{sign } \dot{x}) - 1]$$

$$\boxed{(1 + 4a^2x^2)\ddot{x} + [2ax + \mu(\text{sign } \dot{x})] (2a\dot{x}^2 + g) = 0}$$
 (57)

Bewegungsdgl.

Für die Zwangskraft N ergibt sich damit aus (52):

$$N = -\sqrt{1 + 4a^2x^2} \cdot \frac{m\ddot{x}}{2ax + \mu(\text{sign } \dot{x})}$$
 (58)

Mit der Bewegungsdgl. (57) kann man zudem die Beschleunigung \ddot{x} eliminieren:

$$N = -\sqrt{1 + 4a^2x^2} \cdot \frac{-m [2ax + \mu(\text{sign } \dot{x})] (2a\dot{x}^2 + g)}{(1 + 4a^2x^2) \cdot [2ax + \mu(\text{sign } \dot{x})]}$$

$$\boxed{N = \frac{(2a\dot{x}^2 + g)m}{\sqrt{1 + 4a^2x^2}}} \text{ Zwangskraft}$$
 (59)

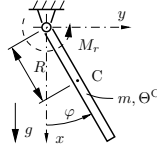
¹Die Signum-Funktion (auch Vorzeichen-Funktion) sign gibt das Vorzeichen des Argumentes (also -1 oder +1) an. Sie ist üblicherweise wie folgt definiert:

$$\text{sign } x = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Aufgabe 44

Bei dem skizzierten Pendel tritt am Gelenk ein linear viskoses Reibmoment der Größe $M_r = -r_\varphi \dot{\varphi}$ auf (r_φ : Drehviskosität).

Stellen Sie für folgende Koordinatensysteme die LAGRANGE-Gleichungen 1. Art auf, werten Sie diese aus, bestimmen Sie die Zwangskraftparameter, werten Sie diese aus und führen Sie eine vergleichende Diskussion durch.



(a) kartesische Koordinaten (x, y) des Massenmittelpunktes C und Drehwinkel φ

(b) ebene Polarkoordinaten (r, φ) des Massenmittelpunktes C

Geg.: $m, \Theta^C, R, g, M_r = -r_\varphi \dot{\varphi}$

(a) generalisierte Koordinaten:

$$q_1 = x; \quad q_2 = y; \quad q_3 = \varphi \quad (60)$$

Kinetische Energie:

$$K = \frac{1}{2}(m\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \Theta^C \dot{\varphi}^2 \quad (61)$$

Potentielle Energie:

$$U = -mgx \quad (62)$$

Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} L &= K - U \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\Theta^C \dot{\varphi}^2 + mgx \end{aligned} \quad (63)$$

Das Reibmoment soll in der Dissipationsfunktion

$$D = \frac{1}{2}r_\varphi \dot{\varphi}^2 \quad (64)$$

berücksichtigt werden.

Ableitungen:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} \quad (65)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = m\ddot{y} \quad (66)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \Theta^C \ddot{\varphi} \quad (67)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial D}{\partial \varphi} = 0 \quad (68)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = mg \quad (69)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial D}{\partial \dot{y}} = 0 \quad (70)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}} = r_\varphi \dot{\varphi} \quad (71)$$

Zwänge, i.a. $f_k = f_k(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, t)$:

$$f_1 := x - R \cos \varphi = 0 \quad (72)$$

$$f_2 := y - R \sin \varphi = 0 \quad (73)$$

Daraus resultierende Zwangskräfte:

$$Z_i = \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i}, \text{ also:} \quad (74)$$

$$Z_1 = \lambda_1 \frac{\partial (x - R \cos \varphi)}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial (y - R \sin \varphi)}{\partial x} = \lambda_1 \quad (75)$$

$$Z_2 = \lambda_2 \quad (76)$$

$$Z_3 = \lambda_1 R \sin \varphi - \lambda_2 R \cos \varphi \quad (77)$$

Alles eingesetzt in die LAGRANGE-Gleichungen 1. Art:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i + Z_i \quad (78)$$

führt (mit $i \in \{1, 2, 3\}$) zu den Gleichungen

$$m\ddot{x} - mg = \lambda_1 \quad (79)$$

$$m\ddot{y} = \lambda_2 \quad (80)$$

$$\Theta^C \ddot{\varphi} + r_\varphi \dot{\varphi} = \lambda_1 R \sin \varphi - \lambda_2 R \cos \varphi \quad (81)$$

Zusammen mit den beiden Zwangsbedingungen (72) und (73) ergeben sich fünf Gleichungen für die drei unbekanntenen Koordinaten x, y und φ und die beiden LAGRANGE-Parameter λ_1 und λ_2 .

Wir wollen jetzt aus diesem Gleichungssystem durch Einsetzen alle Unbekannten bis auf φ eliminieren. Zunächst werden die Zwangsbedingungen (72) und (73) nach den zu eliminierenden Größen umgestellt

$$x = R \cos \varphi; \quad \dot{x} = -R \dot{\varphi} \sin \varphi \quad (82)$$

$$\ddot{x} = -R \ddot{\varphi} \sin \varphi - R \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \quad (83)$$

$$y = R \sin \varphi; \quad \dot{y} = R \dot{\varphi} \cos \varphi \quad (84)$$

$$\ddot{y} = R \ddot{\varphi} \cos \varphi - R \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \quad (85)$$

und in die Gleichungen (79) und (80) eingesetzt (Gl. (81) enthält weder x noch y):

$$m(-R \ddot{\varphi} \sin \varphi - R \dot{\varphi}^2 \cos \varphi - g) = \lambda_1 \quad (86)$$

$$m(R \ddot{\varphi} \cos \varphi - R \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = \lambda_2 \quad (87)$$

Jetzt werden mit (86) und (87) die LAGRANGE-Parameter λ_1 und λ_2 in Gl. (81) eliminiert:

$$(\Theta^C + mR^2) \ddot{\varphi} + r_\varphi \dot{\varphi} + mgR \sin \varphi = 0 \quad (88)$$

Gl. (88) ist die Bewegungsdifferentialgleichung für das System unter Beachtung der Zwänge. Gln. (86) und (87) sind Bestimmungsgleichungen für die LAGRANGE-Parameter λ_1 und λ_2 . Diese wiederum sind die x - bzw. y -Komponenten der Kraft, die von der Fesselung auf das Pendel wirkt.

(b) generalisierte Koordinaten:

$$q_1 = r; \quad q_2 = \varphi \quad (89)$$

Geschwindigkeit des Schwerpunkts zur Bestimmung der Kinetischen Energie:

$$\underline{v}_C = r \underline{e}_r \quad (90)$$

$$\underline{\dot{v}}_C = \dot{\underline{x}}_C = \dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi \quad (91)$$

$$v_C^2 = \underline{v}_C \cdot \underline{v}_C = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \quad (92)$$

($\underline{e}_r = \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi$, das kann man durch Bezug auf eine ortsfeste kartesische Basis leicht zeigen.)

Kinetische Energie:

$$K = \frac{1}{2} [m v_C^2 + \Theta^C \dot{\varphi}^2] = \frac{1}{2} [m \dot{r}^2 + (m r^2 + \Theta^C) \dot{\varphi}^2] \quad (93)$$

Potentielle Energie:

$$U = -m g r \cos \varphi \quad (94)$$

Lagrange-Funktion:

$$L = K - U \quad (95)$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} (m r^2 + \Theta^C) \dot{\varphi}^2 + m g r \cos \varphi \quad (96)$$

Dissipationsfunktion (wie bei a):

$$D = \frac{1}{2} r_\varphi \dot{\varphi}^2 \quad (97)$$

Ableitungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \ddot{r} \quad (98)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2 m r \dot{r} \dot{\varphi} + (m r^2 + \Theta^C) \ddot{\varphi} \quad (99)$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot{\varphi}^2 + m g \cos \varphi \quad (100)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m g r \sin \varphi \quad (101)$$

$$\frac{\partial D}{\partial r} = 0 \quad (102)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \varphi} = r_\varphi \dot{\varphi} \quad (103)$$

Zwangsbedingungen:

$$f := r - R = 0 \quad (104)$$

Daraus resultierende Zwangskräfte:

$$Z_1 = \lambda \frac{\partial (r - R)}{\partial r} = \lambda \quad (105)$$

$$Z_2 = \lambda \frac{\partial (r - R)}{\partial \varphi} = 0 \quad (106)$$

Alles eingesetzt in die LAGRANGE-Gleichungen 1. Art führt zu:

$$m \ddot{r} - m r \dot{\varphi}^2 - m g \cos \varphi = \lambda \quad (107)$$

$$(m r^2 + \Theta^C) \ddot{\varphi} + 2 m r \dot{r} \dot{\varphi} + r_\varphi \dot{\varphi} + m g r \sin \varphi = 0 \quad (108)$$

Zusammen mit der Zwangsbedingung (104) ergeben sich drei Gleichungen für die zwei unbekanntenen Koordinaten r und φ und den LAGRANGE-Parameter λ .

Durch Einsetzen der Zwangsbedingung Gl. (104) in Gl. (108) ergibt sich folgende Bewegungsdiff'gl. für das System unter Beachtung der Zwänge:

$$(m R^2 + \Theta^C) \ddot{\varphi} + r_\varphi \dot{\varphi} + m g R \sin \varphi = 0 \quad (109)$$

Aus Gl. (107) kann der LAGRANGE-Parameter λ bestimmt werden. λ ist der Betrag der Kraft, der vom Gelenk auf das Pendel wirkt.

Vergleich: Das System hat einen Koordinatenfreiheitsgrad. Die Zahl der Zwangsbedingungen und damit die Zahl der Zwangskraftparameter ist gleich der Zahl der überzähligen Koordinaten.

Im Fall (b) ist die Koordinate $q_2 = \varphi$ eine reine Bewegungskordinate, sie geht nicht in die Zwangsbedingung(en) ein. Die zugehörige LAGRANGE-Gleichung 1. Art ist von vornherein zwangskraftfrei.

Bemerkung: Es ist nicht bei allen Problemen möglich, die Zwangskraftparameter und alle überzähligen Koordinaten in geschlossener Form zu eliminieren.