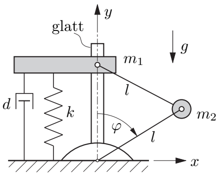
# Tutorium

## Aufgabe 31

Ein starrer Körper (Masse $m_1$) gleitet reibungsfrei in vertikaler Richtung und ist über eine masselose Stange (Länge $l$) mit einer Punktmasse $m_2$ gelenkig verbunden. Der starre Körper ist außerdem über ein lineares Feder-Dämpfer-Element (Federsteifigkeit $k$, Dämpferkonstante $d$) an den Boden gekoppelt. Die entspannte Länge der Feder sei $2l$. Die Punktmasse $m_2$ ist über eine weitere Stange (Länge $l$) gelenkig an den Boden gekoppelt.




(a) Wieviele Freiheitsgrade hat das System?

(b) Stellen Sie die kinetische Energie $T$, die potentielle Energie $U$ und die Dissipationsfunktion $D$ als Funktion von $\varphi$ und $\dot\varphi$ auf. Wie ist die LAGRANGEfunktion $L$ definiert?

(c) Arbeiten Sie im folgenden mit der LAGRANGEfunktion

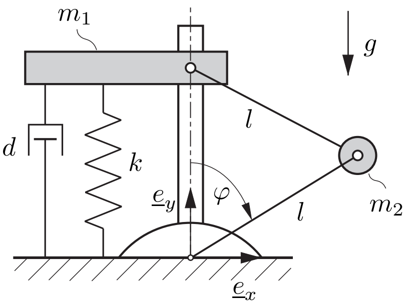
$$L = (2m_1 \sin^2\varphi + \frac{1}{2}m_2)l^2\dot\varphi^2 - (2m_1 + m_2)gl\cos\varphi - 2kl^2(1-\cos\varphi)^2$$

weiter. Bestimmen Sie die Bewegungsdifferentialgleichung für das System.

(d) Wie groß muß die Federsteifigkeit $k$ sein, damit das System für $\varphi_S = \frac{\pi}{3}$ eine Gleichgewichtslage hat?

(e) Welche weiteren Gleichgewichtslagen sind im Bereich $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ vorhanden, wenn die Federsteifigkeit $k$ den in Teil (d) bestimmten Wert hat?

Geg: $k$, $d$, $m_1$, $m_2$, $l$, $g$




**(a)** Das System hat genau einen Freiheitsgrad, d.h. es kann auch nur eine generalisierte Koordinate geben. Ich wähle $\varphi$

**(b)** 1. Kinematik

$$\underline{r}_1 = 2l\cos\varphi\underline{e}_y \tag{1}$$
$$\underline{v}_1 = -2l\dot\varphi\sin\varphi\underline{e}_y \tag{2}$$
$$\underline{r}_2 = l\sin\varphi\underline{e}_x + l\cos\varphi\underline{e}_y \tag{3}$$
$$\underline{v}_2 = l\dot\varphi\cos\varphi\underline{e}_x - l\dot\varphi\sin\varphi\underline{e}_y \tag{4}$$

2. Kinetische Energie:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1 4l^2\dot\varphi^2\sin^2\varphi \\ &\quad + \frac{1}{2}m_2\big(l^2\dot\varphi^2\cos^2\varphi + l^2\dot\varphi^2\sin^2\varphi\big) \\ &= \big(2m_1\sin^2\varphi + \frac{1}{2}m_2\big)l^2\dot\varphi^2 \end{aligned} \tag{5}$$

3. Potentielle Energie:

$$U = 2m_1 g\,l\cos\varphi + m_2 g\,l\cos\varphi + \frac{1}{2}k\big(2l\cos\varphi - 2l\big)^2 \tag{6}$$

4. Lagrange- Funktion:

$$\begin{aligned} L = K - U &= \big(2m_1\sin^2\varphi + \frac{1}{2}m_2\big)l^2\dot\varphi^2 ... \\ &\quad - \big(2m_1 + m_2\big)g\,l\cos\varphi ... \\ &\quad - 2k\,l^2\big(\cos\varphi - 1\big)^2 \end{aligned} \tag{7}$$

5. Dissipationsfunktion und/oder generalisierte Kräfte: Einige nicht-konservative generalisierte Kräfte lassen sich mittels einer Dissipationsfunktion beschreiben. Diese hat die Form

$$D = \frac{1}{\nu}b_\nu|\underline{v}_{rel}|^\nu, \tag{8}$$

wobei je nach Art der Widerstandskraft (Coulomb-Reibung, lineare Dämpfung, Luftwiderstand) $\nu = 1, 2, 3$ einzusetzen und der entsprechende Koeffizient $b_\nu$ zu verwenden sind.

Die zugehörige generalisierte Kraft kann dann mittels der Beziehung

$$Q_i := -\frac{\partial D}{\partial \dot q_i} \tag{9}$$

bestimmt werden.

Im vorliegenden Fall (linearer Dämpfer mit Dämpfungskonstante $d$) sind $\nu = 2$ und $b_\nu = d$ zu verwenden. Damit lautet die Dissipationsfunktion

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2}d|\dot y_1|^2 = \frac{1}{2}d(2l\dot\varphi\sin\varphi)^2 \\ &= 2dl^2\dot\varphi^2\sin^2\varphi. \end{aligned} \tag{10}$$

Die (hier einzige) generalisierte Kraft ist:

$$\begin{aligned} Q_\varphi &= -\frac{\partial D}{\partial\dot\varphi} \\ &= -4d\,l^2\dot\varphi\sin^2\varphi \end{aligned} \tag{11}$$

Diese generalisierte Kraft lässt sich allerdings auch anders bestimmen. Nämlich ist nach Definition:

$$\begin{aligned} Q_\varphi &= \sum_{i=1}^n \underline{F}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial\varphi} \\ &= \underline{F}_D\frac{\partial\underline{r}_1}{\partial\varphi} \\ &= -d\dot y_1\underline{e}_y \cdot (-2l)\sin\varphi\underline{e}_y \\ &= -4d\,l^2\dot\varphi\sin^2\varphi. \end{aligned} \tag{12}$$

**(c)** Ableitungen:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = \big(4m_1\sin^2\varphi + m_2\big)l^2\dot\varphi \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} &= 8m_1\sin\varphi\cos\varphi\dot\varphi^2 l^2 \\ &\quad + \big(4m_1\sin^2\varphi + m_2\big)l^2\ddot\varphi \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial\varphi} &= 4m_1\sin\varphi\cos\varphi\,l^2\dot\varphi^2 + \big(2m_1 + m_2\big)g\,l\sin\varphi \\ &\quad + 4k\,l^2\big(\cos\varphi - 1\big)\sin\varphi \end{aligned} \tag{15}$$

$$\frac{\partial D}{\partial\dot\varphi} = 4d\,l^2\dot\varphi\sin^2\varphi \tag{16}$$

Lagrangegleichungen 2. Art: Die Gleichungen lauten:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} - \frac{\partial L}{\partial\varphi}\Big[+\frac{\partial D}{\partial\dot\varphi}\Big] - \Big\{Q_\varphi\Big\} = 0 \tag{17}$$

Die Gleichung ohne beide geklammerten Terme gilt für Systeme, bei denen alle Kräfte aus einem Potential hergeleitet werden können. Der Term in eckigen Klammern wird benutzt, falls es Kräfte gibt, deren Einfluss mittels einer Dissipationsfunktion beschrieben wird. Wird der Anteil des Dämpfer dort berücksichtigt, so entfällt der Term in geschweiften Klammern. Dieser (bei dem man die generalisierte Kraft direkt berechnet) kann für jede Art von Kräften benutzt werden.

Im vorliegenden Problem benutzt man also entweder $Q_\varphi$ aus Gleichung (11) bzw. (12) und setzt dies zwischen die geschweiften Klammern. Oder(!) man benutzt die Dissipationsfunktion (10) und setzt diese in die eckigen Klammern ein. Es ergibt sich dann die Bewegungsdifferentialgleichung:

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad & 4m_1 \sin\varphi\cos\varphi\,\dot\varphi^2 l^2 + \big(4m_1\sin^2\varphi + m_2\big) l^2\ddot\varphi \\ & - 4k\,l^2\big(\cos\varphi - 1\big)\sin\varphi \\ & - \big(2m_1 + m_2\big) g\,l\sin\varphi + 4d\,l^2\dot\varphi\sin^2\varphi = 0 \qquad (18)\end{aligned}$$

**(d)** Gleichgewichtslage bei $\varphi_s = \frac{\pi}{3}$

Statisches Gleichgewicht heißt: $\ddot\varphi = \dot\varphi = 0$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow -4k\,l^2\big(\cos\varphi_s - 1\big)\sin\varphi_s - \big(2m_1+m_2\big)g\,l\sin\varphi_s = 0\\ &\Rightarrow -4k\,l^2\big(\frac{1}{2} - 1\big)\big(2m_1+m_2\big)g\,l = 0 \qquad (19)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2kl &= \big(2m_1+m_2\big)g\\ k &= \frac{2m_1+m_2}{2l}g \qquad (20)\end{aligned}$$

**(e)** Weitere Gleichgewichtslagen
bei der berechneten Steifigkeit: (20) in (19)

$$\Rightarrow \Big[-2\big(\cos\varphi_s - 1\big) - 1\Big]\sin\varphi_s = 0 \qquad (21)$$

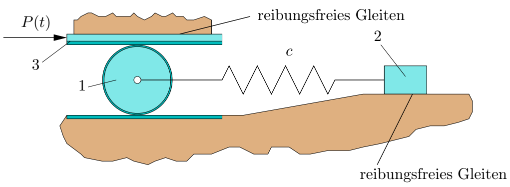
$$\Rightarrow \sin\varphi_s = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi_{s2} = 0} \qquad (22)$$

$$\text{außerdem } \cos\varphi_s = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\varphi_{s3} = -\frac{\pi}{3}} \qquad (23)$$

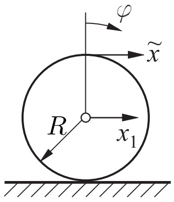
## Aufgabe 32

Das skizzierte System besteht aus einem Zahnrad 1 (Masse $m_1$, Radius $R$), einer Zahnstange 3 und einem Gleitkörper 2 (Masse $m_2$). Die Masse der Zahnstange soll vernachlässigt werden. Zudem soll für eine erste Untersuchung des Schwingungsverhaltens auf eine Berücksichtigung der Reibung verzichtet werden.

Durch eine periodische Kraft $P(t)$ wird das System zu Schwingungen angeregt. Bestimme mit Hilfe der LAGRANGEschen Gleichungen die Bewegungsgleichungen des Systems!




Geg.: $m_1$, $m_2$, $R$, $P(t)$, $c$




Kinematische Beziehungen:
$\dot\varphi_1 = \dot x_1/R$ und $\tilde x = 2\,x_1$

Massenträgheitsmoment:
$\Theta_1^S = \frac{1}{2}m_1R^2$

Kinetische Energie:

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{2}m_1\dot x_1^2 + \frac{1}{2}\Theta_1^S\dot\varphi_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot x_2^2\\ &= \frac{3}{4}m_1\dot x_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot x_2^2 \qquad (24)\end{aligned}$$

Potentielle Energie der Feder:

$$U = \frac{1}{2}\,c\,(x_2 - x_1)^2 \qquad (25)$$

Berechnung der generalisierten Kraft:

Virtuelle Arbeit:

$$\begin{aligned}\delta W &= P\delta\tilde x = P\frac{\partial\tilde x}{\partial x_1}\,\delta x_1 = P\frac{\partial(2x_1)}{\partial x_1}\,\delta x_1\\ &= 2P\delta x_1 = Q_1\delta x_1\\ \Rightarrow \quad & Q_1 = 2P \qquad (26)\end{aligned}$$

Mit der Lagrange Funktion $L = T - U$ gilt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot x_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = Q_i \qquad i = 1,2 \qquad (27)$$

(24) und (25) und (26) eingesetzt, es ergeben sich die Bewegungsgleichungen des Systems:

$$\frac{3}{2}m_1\ddot x_1 - c\,(x_2 - x_1) = 2P(t) \qquad (28)$$

$$m_2\ddot x_2 + c\,(x_2 - x_1) = 0 \qquad (29)$$

# Hausaufgabe

## Aufgabe 27

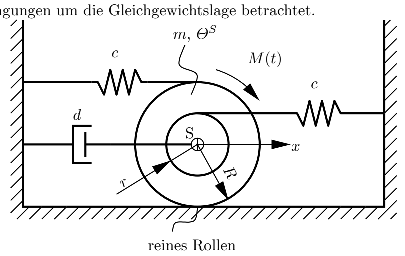
Das skizzierte System wird durch das Moment $M(t)$ zum Schwingen angeregt. In der eingezeichneten Position ($x = 0$) sind beide Federn gespannt. Die obere Feder ist um die Länge $l_0$ gespannt; die untere Feder ist so gespannt, daß $x = 0$ die Gleichgewichtslage ist. Die Seile seien undehnbar. Es werden ausschließlich kleine Schwingungen um die Gleichgewichtslage betrachtet.

(a) Stellen Sie die kinetische Energie $T$ und potentielle Energie $U$ für das System auf.

(b) Bestimmen Sie die Dissipationsfunktion $D$ oder die generalisierte Kraft $Q$.

(c) Bestimmen Sie nun die Bewegungsdifferentialgleichung in der Schwerpunktskoordinate $x$. Um welche Länge muß die untere Feder gespannt sein, damit $x = 0$ die Gleichgewichtslage ist?

(d) Bestimmen sie die Amplitude der stationären Schwingung!




Geg.: $m$, $\Theta^S$, $M(t) = M_0 \cos \Omega t$, $M_0$, $\Omega$, $c$, $d$

**(a)** Kinematik: In der gezeichneten Lage sind die Federn bereits gespannt. Seien $l_0$ und $l_u$ die Auslenkungen der oberen bzw. der unteren Feder.

Für das rollende Rad besteht zwischen Drehwinkel $\varphi$ und Verschiebung des Mittelpunktes der Zusammenhang

$$\varphi = \frac{x}{R} \rightarrow \dot{\varphi} = \frac{\dot{x}}{R}. \tag{30}$$

Potentiellen und kinetischen Energie:

$$U = \frac{1}{2} c \left(l_0 + 2x\right)^2 + \frac{1}{2} c \left(l_u - \frac{R+r}{R} x\right)^2 \tag{31}$$

$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \Theta^S \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \left(m + \frac{\Theta^S}{R^2}\right) \dot{x}^2 \tag{32}$$

**(b)** Dissipationsfunktion:

$$D = \frac{1}{2} d \dot{x}^2 \tag{33}$$

Alternativ ist die Darstellung über eine generalisierte Kraft möglich:

$$Q_D = \underline{F}_D \frac{\partial \underline{r}_D}{\partial x} = -d\dot{x}\underline{e}_x \cdot \frac{\partial (x\underline{e}_x)}{\partial x} = -d\dot{x}. \tag{34}$$

Das Erregermoment muss über seine generalisierte Kraft in den Formalismus eingefügt werden:

$$Q_M = \underline{M}(t) \cdot \frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial x} = M(t)\underline{e}_z \cdot \frac{\partial (\varphi \underline{e}_z)}{\partial x} = \frac{M(t)}{R} \tag{35}$$

**(c)** Lagrange-Funktion:

$$L = K - U \tag{36}$$

$$= \frac{1}{2} \left(m + \frac{\Theta^S}{R^2}\right) \dot{x}^2 - \frac{1}{2} c \left[\left(l_0 + 2x\right)^2 + \left(l_u - \frac{R+r}{R} x\right)^2\right] \tag{37}$$

Lagrange-Gleichung 2.Art:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = Q_M \tag{38}$$

$$\text{alternativ:} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = Q_M + Q_D \tag{39}$$

In (38) wird der Einfluss des Dämpfers in der partiellen Ableitung der Dissipationsfunktion berücksichtigt, in (39) geschieht das mittels der generalisierten Kraft $Q_D$. Im Folgenden wird (38) verwendet.

partielle Ableitungen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \left(m + \frac{\Theta^S}{R^2}\right) \ddot{x} \tag{40}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = c \left(-2(l_0 + 2x) + \frac{R+r}{R}(l_u - \frac{R+r}{R} x)\right) \tag{41}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = d\dot{x} \tag{42}$$

Durch Einsetzen in (38) erhält man die Differentialgleichung:

$$\left(m + \frac{\Theta^S}{R^2}\right) \ddot{x} + d\dot{x} + c\left[2\left(l_0 + 2x\right) - \frac{R+r}{R}\left(l_u - \frac{R+r}{R} x\right)\right] = \frac{M(t)}{R} \tag{43}$$

Im Gleichgewicht gilt $\dot{x} = \ddot{x} = 0$ und nach Vorgabe auch $x = 0$. Außerdem ist hierfür auch $M(t)$ anzunehmen. Einsetzen dieser Bedingungen in (43) ergibt

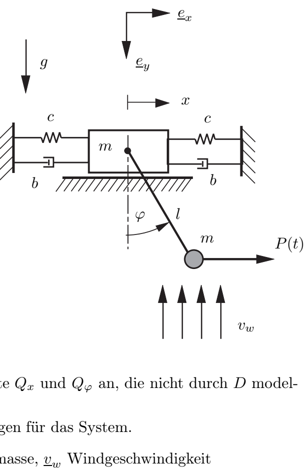
$$2l_0 - l_u \frac{R+r}{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad l_u = \frac{2R}{R+r} l_0 \tag{44}$$

Setzt man den Wert für $l_u$ in (43) ein, so folgt:

$$\left(m + \frac{\Theta^S}{R^2}\right) \ddot{x} + d\dot{x} + c\left[4 + \left(\frac{R+r}{R}\right)^2\right] x = \frac{M(t)}{R}. \tag{45}$$

## Aufgabe 30

Das skizzierte System besteht aus einem starren Körper der Masse $m$, der auf einer Ebene reibungsfrei gleitet und mit zwei Federn und zwei Dämpfern an die Umgebung gebunden ist. Im Körperschwerpunkt ist ein mathematisches Pendel (Länge $l$, Masse $m$) angebracht, das von einem Wind der Geschwindigkeit $\underline{v}_w$ von unten angeblasen wird (Luftwiderstandsbeiwert $k$). Die Pendelmasse wird durch die Kraft $\underline{P}(t) = P_0 \cos \Omega t \underline{e}_x$ erregt. Die Bewegung verläuft im Erdschwerefeld.




(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion $L$ des Systems bzgl. der generalisierten Koordinaten $x$ und $\varphi$ auf.

(b) Berechnen Sie den Betrag der Relativgeschwindigkeit $|\underline{v}_{rel}|$ zwischen Pendelmasse und Wind.

(c) Stellen Sie die Dissipationsfunktion $D$ des Systems auf.

(d) Geben Sie die generalisierten Nicht-Potentialkräfte $Q_x$ und $Q_\varphi$ an, die nicht durch $D$ modellierbar sind.

(e) Bestimmen Sie die Bewegungsdifferentialgleichungen für das System.

**Hinweis:** $\underline{v}_{rel} = \underline{v}_m - \underline{v}_w$; $\underline{v}_m$: Geschw. der Pendelmasse, $\underline{v}_w$ Windgeschwindigkeit
Geg.: $m$, $b$, $c$, $k$, $l$, $g$, $v_w$, $P_0$, $\Omega$

**(a)** Kinematik:

$$\underline{r}_1 = x\underline{e}_x \;\Rightarrow\; \underline{v}_1 \equiv \dot{\underline{r}}_1 = \dot{x}\underline{e}_x \tag{46}$$

$$\underline{r}_2 = (x + l\sin\varphi)\underline{e}_x + l\cos\varphi\underline{e}_y \tag{47}$$

$$\underline{v}_2 = \left(\dot{x} + l\cos\varphi\dot{\varphi}\right)\underline{e}_x + \left(-l\sin\varphi\dot{\varphi}\right)\underline{e}_y \tag{48}$$

Kinetische Energie:

$$K = \frac{1}{2}m\underline{v}_1^2 + \frac{1}{2}m\underline{v}_2^2$$
$$= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\Big[\big(\dot{x} + l\cos\varphi\dot{\varphi}\big)^2 + \big(-l\sin\varphi\dot{\varphi}\big)^2\Big]$$
$$= \frac{1}{2}m\big(2\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2\big) \tag{49}$$

Potentielle Energie:

$$U = -mgl\cos\varphi + cx^2 \tag{50}$$

LAGRANGE-Funktion:

$$L = K - U \tag{51}$$
$$L = \frac{m}{2}\left(2\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2\right) + mgl\cos\varphi - cx^2 \tag{52}$$

**(b)** Relativgeschwindigkeit zwischen Wind und Kugel

$$\underline{v}_{rel} = \underline{v}_m - \underline{v}_w \qquad \underline{v}_w = -v_w\underline{e}_y \tag{53}$$
$$\underline{v}_{rel} = \big(\dot{x} + l\cos\varphi\dot{\varphi}\big)\underline{e}_x + \big(-l\sin\varphi\dot{\varphi}\big)\underline{e}_y - \big(-v_w\big)\underline{e}_y$$
$$\underline{v}_{rel} = \big(\dot{x} + l\cos\varphi\dot{\varphi}\big)\underline{e}_x + \big(v_w - l\sin\varphi\dot{\varphi}\big)\underline{e}_y \tag{54}$$
$$|\underline{v}_{rel}| = \sqrt{\big(\dot{x} + l\cos\varphi\dot{\varphi}\big)^2 + \big(v_w - l\sin\varphi\dot{\varphi}\big)^2}$$
$$|\underline{v}_{rel}| = \sqrt{\dot{x}^2 + v_w^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\big(\dot{x}\cos\varphi - v_w\sin\varphi\big)} \tag{55}$$

**(c)** Dissipationsfunktion

$$D = b\dot{x}^2 + \frac{1}{3}k|\underline{v}_{rel}|^3 \tag{56}$$
$$D = b\dot{x}^2 + \frac{k}{3}\left[\dot{x}^2 + v_w^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\big(\dot{x}\cos\varphi - v_w\sin\varphi\big)\right]^{\frac{3}{2}} \tag{57}$$

**(d)** generalisierte Kräfte:

$$\delta W_p = \underline{P}(t)\underline{e}_x\delta\underline{r}_2 \tag{58}$$
$$= P(t)\underline{e}_x\left(\frac{\partial\underline{r}_2}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\underline{r}_2}{\partial\varphi}\delta\varphi\right) \tag{59}$$
$$\delta W_p = P(t)\big(\delta x + l\cos\varphi\delta\varphi\big) \tag{60}$$
$$Q_x = P(t) \tag{61}$$
$$Q_\varphi = P(t)l\cos\varphi \tag{62}$$

**(e)** Ableitungen:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right) = 2m\dot{x} + ml\dot{\varphi}\cos\varphi \tag{63}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}} = 2m\ddot{x} + ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi \tag{64}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2cx \tag{65}$$
$$\frac{\partial D}{\partial\dot{x}} = 2b\dot{x} + \frac{k}{2}|\underline{v}_{rel}|\big(2\dot{x} + 2l\dot{\varphi}\cos\varphi\big) \tag{66}$$
$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = ml\dot{x}\cos\varphi + ml^2\dot{\varphi} \tag{67}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) = ml\ddot{x}\cos\varphi - ml\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + ml^2\ddot{\varphi} \tag{68}$$
$$\frac{\partial L}{\partial\varphi} = -ml\dot{\varphi}\dot{x}\sin\varphi - mgl\sin\varphi \tag{69}$$
$$\frac{\partial D}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{1}{2}k|\underline{v}_{rel}|\big(2l^2\dot{\varphi} + 2l(\dot{x}\cos\varphi - v_w\sin\varphi)\big) \tag{70}$$

LAGRANGE-Gleichungen 2.Art:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial\dot{q}_i} = Q_i \tag{71}$$

Bewegungsdifferentialgleichungssystem:

$$2m\ddot{x} + ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi + 2cx + 2b\dot{x} + k|\underline{v}_{rel}|\big(\dot{x} + l\dot{\varphi}\cos\varphi\big) = P(t) \tag{72}$$

$$ml^2\ddot{\varphi} + ml\ddot{x}\cos\varphi + mgl\sin\varphi + k|\underline{v}_{rel}|\big(l^2\dot{\varphi} + l(\dot{x}\cos\varphi - v_w\sin\varphi)\big) = P(t)l\cos\varphi \tag{73}$$