Hinweis zu den Hausaufgaben

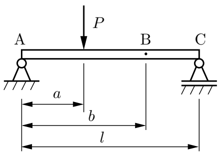
Die Aufgabe 4 wurde versehentlich als Hausaufgabe in der Plenarübung und evtl. im Tutorium genannt. Daher hier die Berichtigung: Hausaufgabe ist **Aufgabe 5**.
Da einige sich schon mit Aufgabe 4 beschäftigt hatten ist die Musterlösung hier mit veröffentlicht. Diese Aufgabe ist allerdings **nicht** als bekannte Aufgabe für die Klausur relevant.

Tutorium

Aufgabe 13

Für den durch eine Einzelkraft P belasteten skizzierten Balken ist die Lagerkraft im Punkt C sowie das Schnittmoment im Punkt B mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen zu bestimmen.

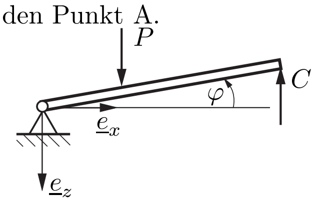
Geg.: P, l, a, b



Der ausführliche Lösungsweg

1. Lagerkraft im Punkt C:

   Die gesuchte unbekannte Lagerkraft wird sichtbar gemacht. Der dadurch entstehende Pseudofreiheitsgrad ermöglicht eine gedachte Drehung des starren Balkens um den Punkt A.



   Ortsvektoren:

$$\underline{r}_P = a\cos\varphi\underline{e}_x - a\sin\varphi\underline{e}_z \quad (1)$$
$$\underline{r}_C = l\cos\varphi\underline{e}_x - l\sin\varphi\underline{e}_z \quad (2)$$

   Variation:

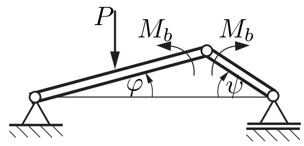
$$\delta\underline{r}_C = -\,l\sin\varphi|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_x - l\cos\varphi|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_z \quad (3)$$
$$= \underline{\underline{-l\delta\varphi\underline{e}_z}} \quad (4)$$
$$\delta\underline{r}_P = -\,a\sin\varphi|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_x - a\cos\varphi|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_z \quad (5)$$
$$= \underline{\underline{-a\delta\varphi\underline{e}_z}} \quad (6)$$

   Prinzip der virtuellen Verrückungen:

$$\delta W = \underline{P}\cdot\delta\underline{r}_P + \underline{C}\cdot\delta\underline{r}_C = 0 \quad (7)$$
$$(-Pa + Cl)\delta\varphi = 0 \Rightarrow \underline{\underline{C = P\frac{a}{l}}} \quad (8)$$

2. Schnittmoment an der Stelle $x = b$:

   Da im Prinzip der virtuellen Verrückungen nur das gesuchte Schnittmoment als unbekannte Größe auftauchen soll, wird das System derart kinematisch gemacht, daß ein Gelenk an der Stelle $x = b$ eingebaut wird. Nach einem Freischnitt am Gelenk treten entsprechend dem dritten Newtonschen Grundgesetz sowohl in horizontaler als auch vertikaler Richtung Zwangskräfte und zugehörige Reaktionkräfte auf. Da die Kräfte in entgegengesetzte Richtungen weisen, aber an der selben gedachten Verschiebung ´´arbeiten´´, addieren sich ihre Anteile an der virtuellen Arbeit zu Null. Die Schnittmomente hingegen drehen zwar entgegengesetzt, die zugehörigen Winkelverdrehungen der Systemteile jedoch auch und sind zudem noch ungleich.



   Kinematische Beziehung:

   Da das System lediglich einen Freiheitsgrad hat, müssen φ und ψ abhängig voneinander sein. Diese Abhängigkeit kann über die Vertikalverschiebung des Gelenkes bestimmt werden:

$$b\sin\varphi = (l-b)\sin\psi \quad (9)$$

   Variation der Gleichung führt auf:

$$b\cos\varphi|_{\varphi=0}\delta\varphi = (l-b)\cos\psi|_{\psi=0}\delta\psi \quad (10)$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{\delta\psi = \frac{b}{l-b}\delta\varphi}} \quad (11)$$

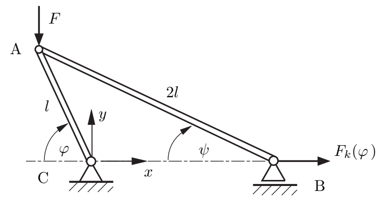
   Prinzip der virtuellen Verrückungen:

$$\delta W = \underline{P}\cdot\delta\underline{r}_P + M_b\underline{e}_y\cdot\delta\underline{\varphi} + (-M_b\underline{e}_y)\cdot\delta\underline{\psi} = 0 \quad (12)$$
$$(-Pa + M_b + M_b\frac{b}{l-b})\delta\varphi = 0 \quad (13)$$
$$(\delta\varphi \neq 0) \Rightarrow \underline{\underline{M_b = P\frac{a}{l}(l-b)}} \quad (14)$$

Aufgabe 8

Die abgebildete Konstruktion aus starren Stäben wird mit der Kraft F belastet und befindet sich im statischen Gleichgewicht. Berechnen Sie mit dem *Prinzip der virtuellen Arbeit* die Haltekraft F_k als Funktion des Winkels φ.

Geg.: F, l



φ_a, ψ_a Winkelbezeichnungen in der ausgelenkte Lage

Ortsvektoren:

$$\vec{r}_F = -l\cos\varphi_a\vec{e}_x + l\sin\varphi_a\vec{e}_y \quad (15)$$
$$\vec{r}_K = (2l\cos\psi_a - l\cos\varphi_a)\vec{e}_x \quad (16)$$

Variation:
Allgemein gilt für eine Größe $\vec{r}$ als Funktion von N Koordinaten q_i:

$$\delta\vec{r}\,(q_1,...,q_N) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\delta q_i \quad . \tag{17}$$

$$\delta\vec{r}_F = l\sin\varphi_a\Big|_{\varphi_a=\varphi}\delta\varphi\vec{e}_x + l\cos\varphi_a\Big|_{\varphi_a=\varphi}\delta\varphi\vec{e}_y \tag{18}$$

$$\delta\vec{r}_K = \left(-2l\sin\psi_a\Big|_{\psi_a=\psi}\delta\psi + l\sin\varphi_a\Big|_{\varphi_a=\varphi}\delta\varphi\right)\vec{e}_x \tag{19}$$

Kinematische Beziehung:
In diesem Fall hat das System lediglich einen FHG ($N = 1$) und wird damit durch die Koordinate $q_1 = \varphi$ eindeutig beschrieben. Um das Prinzip der virtuellen Verrückungen anzuwenden, müssen alle Bewegungsmöglichkeiten durch eine Variable - hier φ - ausgedrückt werden. Dazu ist es nun nötig, über die kinematischen Beziehungen Ausdrücke für $\delta\psi$, $\cos\psi$ und $\sin\psi$ in Abhängigkeit von φ zu bestimmen.

Aus der Höhe des Punktes A folgt:

$$2l\sin\psi = l\sin\varphi \qquad \Rightarrow \quad \sin\psi = \frac{\sin\varphi}{2} \tag{20}$$

bzw.

$$2\sin\psi_a = \sin\varphi_a \tag{21}$$

$$2\cos\psi_a\Big|_{\psi_a=\psi}\delta\psi = \cos\varphi_a\Big|_{\varphi_a=\varphi}\delta\varphi \tag{22}$$

$$2\cos\psi\delta\psi = \cos\varphi\delta\varphi \tag{23}$$

$$\delta\psi = \frac{\cos\varphi}{2\cos\psi}\delta\varphi \tag{24}$$

Aus Gl. (20) lässt sich mit $\sin^2\psi = 1 - \cos^2\psi$ der Term $\cos\psi$ umformen:

$$4\sin^2\psi = \sin^2\varphi \tag{25}$$

$$4\left(1-\cos^2\psi\right) = \sin^2\varphi \tag{26}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\psi = \frac{1}{2}\sqrt{4-\sin^2\varphi} \quad . \tag{27}$$

$\sin\psi$, $\cos\psi$ und $\delta\psi$ einsetzen:

$$\delta\vec{r}_K = \left(-2l\sin\psi\frac{\cos\varphi}{2\cos\psi}\delta\varphi + l\sin\varphi\delta\varphi\right)\underline{e}_x \tag{28}$$

$$= \left(-2l\frac{\sin\varphi}{2}\frac{\cos\varphi}{2\frac{1}{2}\sqrt{4-\sin^2\varphi}}\delta\varphi + l\sin\varphi\delta\varphi\right)\underline{e}_x \tag{29}$$

$$= \left(l\sin\varphi - l\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{4-\sin^2\varphi}}\right)\delta\varphi\vec{e}_x \tag{30}$$

Prinzip der virtuellen Arbeit:
Nach dem PdvA verschwindet im Gleichgewicht die virtuelle Arbeit δW aller äußeren Lasten am System:

$$\delta W = \vec{F}\cdot\delta\vec{r}_F + \vec{F}_K\cdot\delta\vec{r}_K = 0 \tag{31}$$

Dabei ist darauf zu achten, dass die Lasten richtungstreu bleiben, also <u>nicht</u> variiert werden.

$$\left[-Fl\cos\varphi + F_K\left(l\sin\varphi - l\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{4-\sin^2\varphi}}\right)\right]\delta\varphi = 0 \tag{32}$$

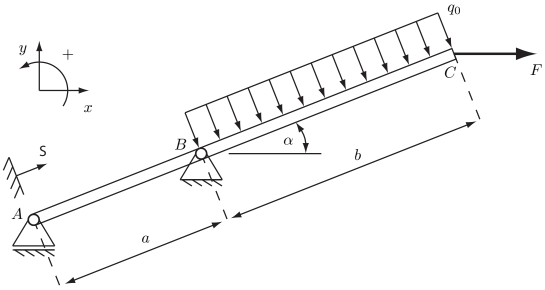
$$\underline{\underline{F_K = F\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{4-\sin^2\varphi}}}}} \tag{33}$$

Dieses Beispiel offenbart die besondere Ökonomie des Prinzips der virtuellen Arbeit. Das Ergebniss lässt sich ableiten ohne dabei, wie beim Freischneiden notwendig, Zwangskräfte wie z.B. Lagerreaktionen oder Schnittlasten bestimmen zu müssen.

Hausaufgabe

Aufgabe 4

Ein unter dem Winkel $\alpha = 30°$ zur Horizontalen geneigter Träger der Länge $a+b$ ist in A einwertig und in B zweiwertig gelagert. Der Träger wird durch eine im Trägerteil $B-C$ angreifende konstante Streckenlast q_0 sowie durch eine horizontale wirkende Kraft $\underline{F}$ an der Stelle C belastet.



Man berechne mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit:

(a) für $q_0 = 0$ die Lagerreaktion A

(b) für $q_0 = 0$ die im Bereich $a \le s \le a+b$ des Trägers auftretende

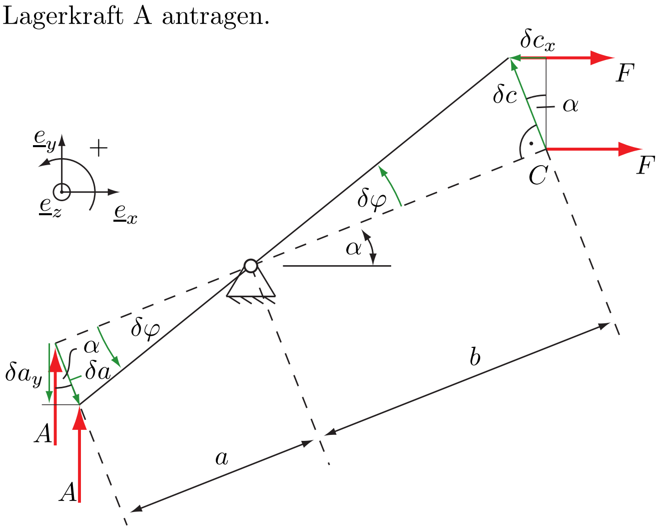
1. Normalkraft $N(s)$,
2. Querkraft $Q(s)$ und
3. das Biegemoment $M(s)$.

(c) für eine vorgegebene Streckenlast q_0 die im Bereich $a \le s \le a+b$ des Trägers auftretende Querkraft $Q(s)$.

Dazu skizziere man jeweils das virtuell verschobene bzw. verdrehte System , stelle die kinematischen Beziehungen auf und werte das Prinzip der virtuellen Arbeit aus.
Geg.: a, b, α, F, q_0

(a) Lagerreaktion in A bei $q_0 = 0$

Dazu den Balken in Lager A beweglich machen und Lagerkraft A antragen.



Virtuelle Arbeit δW

$$\delta W = -A \cdot \delta a_y - F \cdot \delta c_x \stackrel{!}{=} 0 \tag{34}$$

Da die Belastungen entgegen ihre Verschiebung wirken, müssen sie in (34) negativ berücksichtigt werden.

Geometrische Beziehungen:

$$\delta a_y = \delta a \cdot \cos\alpha = \delta\varphi \cdot a\cos\alpha \tag{35}$$

$$= \delta\varphi \cdot a\cos 30° = \delta\varphi \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{36}$$

$$\delta c_x = \delta c \cdot \sin\alpha = \delta\varphi \cdot b\sin\alpha \tag{37}$$

$$= \delta\varphi \cdot b\sin 30° = \delta\varphi \cdot b\frac{1}{2} \tag{38}$$

Einsetzen in (34) liefert:

$$\delta W = \left(-A \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2} - F \cdot b\frac{1}{2}\right)\delta\varphi = 0 \tag{39}$$

Da die virtuelle Drehung $\delta\varphi$ nicht Null ist, muss der Klammerausdruck verschwinden.

$$-A \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2} - F \cdot b\frac{1}{2} = 0 \tag{40}$$

$$\Rightarrow\ A = -\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{b}{a}F \tag{41}$$

alternativ:

Aufstellen der Viruellen Arbeit in vekorieller Form.

$$\delta W = \underline{A} \cdot \delta\underline{a} + \underline{F} \cdot \delta\underline{c} \tag{42}$$

$$\underline{A} = A\,\underline{e}_y \tag{43}$$

$$\delta\underline{a} = \delta\varphi\ a\sin\alpha\ \underline{e}_x + \delta\varphi\ a\cos\alpha\ \left(-\underline{e}_y\right) \tag{44}$$

$$= \delta\varphi\ a\frac{1}{2}\ \underline{e}_x - \delta\varphi\ a\frac{\sqrt{3}}{2}\ \underline{e}_y \tag{45}$$

$$\underline{F} = F\ \underline{e}_x \tag{46}$$

$$\delta\underline{c} = \delta\varphi\ b\sin\alpha\,(-\underline{e}_x) + \delta\varphi\ b\cos\alpha\ \underline{e}_y \tag{47}$$

$$= -\delta\varphi\ b\frac{1}{2}\underline{e}_x + \delta\varphi\ b\frac{\sqrt{3}}{2}\underline{e}_y \tag{48}$$

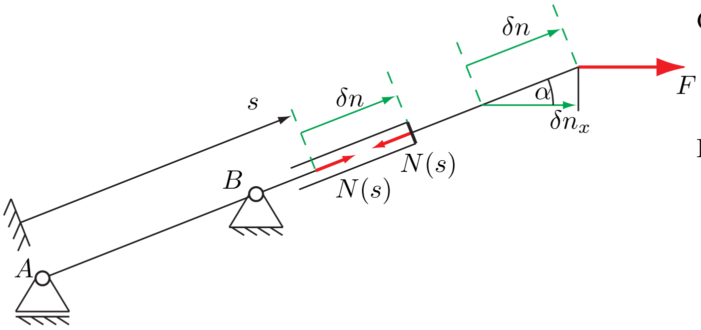
Einsetzen in (42) liefert wieder das aus (39) bekannte Ergebnis

$$\delta W = \left(-A\ a\frac{\sqrt{3}}{2} - F\ b\frac{1}{2}\right)\delta\varphi$$

(b) Schnittgrößen im Bereich $a \le s \le a+b$ für $q_0 \equiv 0$

Normalkraft

Dazu den Balken in dem gegebenen Bereich in Richtung der Normalkraft beweglich machen und $N(s)$ antragen.



Virtuelle Arbeit δW

$$\delta W = -N(s) \cdot \delta n + F \cdot \delta n_x \overset{!}{=} 0 \tag{49}$$

Geometrische Beziehung:

$$\delta n_x = \delta n \; \cos\alpha \tag{50}$$

Einsetzen in (49)

$$\delta W = (-N(s) + F \;\cos\alpha)\, \delta n = 0 \tag{51}$$

$$\Rightarrow \; N(s) = F \;\cos\alpha = F\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{52}$$

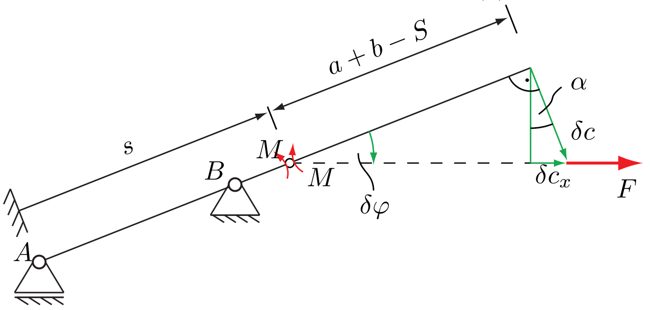
alternativ vektoriell

$$\delta W = \underline{N} \cdot \delta \underline{n} + \underline{F} \cdot \delta \underline{n} \overset{!}{=} 0 \tag{53}$$

$$\begin{aligned} \underline{N} &= N \sin\alpha \; \underline{e}_y + N \cos\alpha \; \underline{e}_x && (54)\\ \underline{F} &= F \; \underline{e}_x && (55)\\ \delta\underline{n} &= \delta n \sin\alpha \; \underline{e}_y + \delta n \cos\alpha \; \underline{e}_x && (56) \end{aligned}$$

Biegemoment

Dazu den Balken in dem gegebenen Bereich in Richtung des Momentes beweglich machen und $M(s)$ antragen.



Virtuelle Arbeit δW

$$\delta W = M(s) \cdot \delta\varphi + F \cdot \delta c_x \overset{!}{=} 0 \tag{57}$$

Geometrische Beziehung:

$$\delta c_x = \delta c \; \sin\alpha = (a + b - s)\delta\varphi \; \sin\alpha \tag{58}$$

Einsetzen in (57)

$$\delta W = (M(s) + F(a + b - s)\sin\alpha)\, \delta\varphi = 0 \tag{59}$$

$$\Rightarrow \; M(s) = -F(a + b - s)\sin\alpha = -\frac{1}{2}F(a + b - s) \tag{60}$$

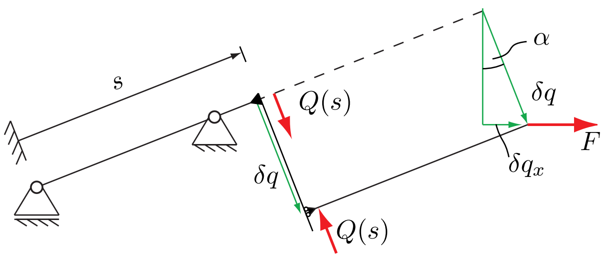
alternativ vektoriell

$$\delta W = \underline{M}(s) \cdot \delta\underline{\varphi} + \underline{F} \cdot \delta\underline{c} \overset{!}{=} 0 \tag{61}$$

$$\begin{aligned} \underline{M}(s) &= M(s)\,(-\underline{e}_z) && (62)\\ \underline{F} &= F \; \underline{e}_x && (63)\\ \delta\underline{\varphi} &= \delta\varphi\,(-\underline{e}_z) && (64)\\ \delta\underline{c} &= (a + b - s)\delta\varphi \; \sin\alpha \; \underline{e}_x && (65)\\ &\quad +(a + b - s)\delta\varphi \; \cos\alpha \; (-\underline{e}_x) && (66) \end{aligned}$$

Querkraft

Dazu den Balken in dem gegebenen Bereich in Richtung der Querkraft beweglich machen und $Q(s)$ antragen.



Virtuelle Arbeit δW

$$\delta W = -Q(s) \cdot \delta q + F \cdot \delta q_x \overset{!}{=} 0 \tag{67}$$

Geometrische Beziehung:

$$\delta q_x = \delta q \; \sin\alpha \tag{68}$$

Einsetzen in (67)

$$\delta W = (-Q(s) + F \sin\alpha)\, \delta q = 0 \tag{69}$$

$$\Rightarrow \; Q(s) = F \sin\alpha = \frac{1}{2}F \tag{70}$$

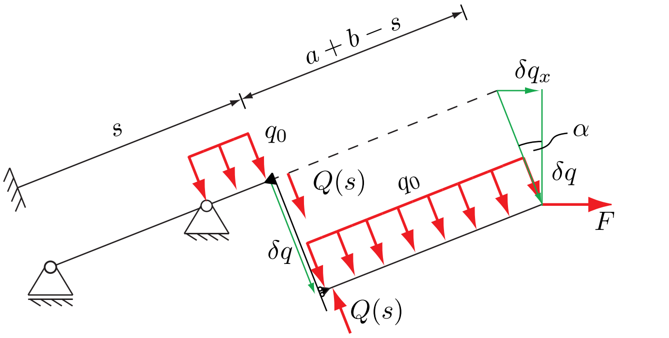
alternativ vektoriell

$$\delta W = \underline{Q}(s) \cdot \delta\underline{q} + \underline{F} \cdot \delta\underline{q} \overset{!}{=} 0 \tag{71}$$

$$\begin{aligned} \underline{Q}(s) &= -Q(s)\sin\alpha \; \underline{e}_x + Q(s)\cos\alpha \; \underline{e}_y && (72)\\ \underline{F} &= F \; \underline{e}_x && (73)\\ \delta\underline{q} &= \delta q \sin\alpha \; \underline{e}_x - \delta q \cos\alpha \; \underline{e}_y && (74) \end{aligned}$$

(c) Bestimmung der Querkraft im Bereich $a \leq s \leq a+b$ für $q_0 \neq 0$

Dazu den Balken in dem gegebenen Bereich in Richtung der Querkraft beweglich machen und $Q(s)$ antragen.



Virtuelle Arbeit δW

$$\delta W = -Q(s)\cdot\delta q + (a+b-s)q_0\ \delta q + F\cdot\delta q_x \stackrel{!}{=} 0 \tag{75}$$

Geometrische Beziehung:

$$\delta q_x = \delta q\ \sin\alpha \tag{76}$$

Einsetzen in (75)

$$\delta W = [-Q(s) + (a+b-s)q_0 + F\sin\alpha]\,\delta q = 0 \tag{77}$$

$$\Rightarrow\ Q(s) = (a+b-s)q_0 + F\sin\alpha \tag{78}$$

$$= \frac{1}{2}F + (a+b-s)q_0 \tag{79}$$

alternativ vektoriell

$$\delta W = \underline{Q}(s)\cdot\delta\underline{q} + \int_a^{a+b-s} \underline{q}_0\ \mathrm{d}\underline{s}\cdot\delta\underline{q} + \underline{F}\cdot\delta\underline{q} \stackrel{!}{=} 0 \tag{80}$$

$$\underline{Q}(s) = -Q(s)\sin\alpha\ \underline{e}_x + Q(s)\cos\alpha\ \underline{e}_y \tag{81}$$

$$\underline{q_0} = q_0\sin\alpha\ \underline{e}_x - q_0\cos\alpha\ \underline{e}_y \tag{82}$$

$$\underline{F} = F\ \underline{e}_x \tag{83}$$

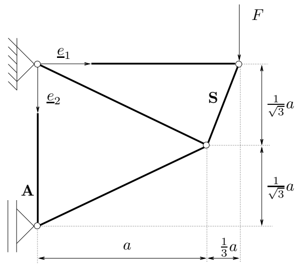
$$\delta\underline{q} = \delta q\sin\alpha\ \underline{e}_x - \delta q\cos\alpha\ \underline{e}_y \tag{84}$$

Aufgabe 5

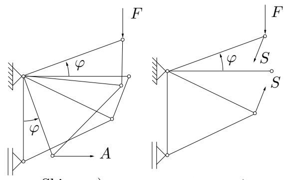
Das abgebildete Fachwerk aus starren Stäben wird mit der Kraft F belastet.

(a) Berechnen Sie mit den Basisvektoren $\underline{e}_1$ und $\underline{e}_2$ sowie mit Skizze *a)* die Ortsvektoren $\underline{r}_A$ und $\underline{r}_F$ zu den Angriffspunkten der Kräfte A und F. Berechnen Sie die Variationen $\delta\underline{r}_A$ und $\delta\underline{r}_F$. Berechnen Sie die Lagerkraft A mithilfe des PdvV.

(b) Notieren Sie mit Skizze *b)* den Ortsvektor $\underline{r}_F = \underline{r}_S$ zum gemeinsamen Angriffspunkt der Kräfte F und S. Berechnen Sie die Variationen $\delta\underline{r}_F$ und $\delta\underline{r}_S$. Berechnen Sie die Stabkraft S mithilfe des PdvV, indem Sie S als äußere Last ansehen.



Hinweis:
$\operatorname{atan}\frac{\sqrt{3}}{3} = 30°$
$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin 30° = \frac{1}{2}$



Skizze *a)* Skizze *b)*

(a) Die Ortsvektoren $\underline{r}_A$ und $\underline{r}_A$ vom drehbaren Festlager zu den Kraftanfgriffspunkten lauten:

$$\underline{r}_A = \frac{2}{\sqrt{3}}a\left(\sin(\varphi)\underline{e}_1 + \cos(\varphi)\underline{e}_2\right)$$

$$\underline{r}_F = \frac{4}{3}a\left(\cos(\varphi)\underline{e}_1 - \sin(\varphi)\underline{e}_2\right)$$

- Die Variation ergibt sich dann zu:

$$\delta\underline{r}_A = \frac{\partial\underline{r}_A}{\partial\varphi}\delta\varphi = \frac{2}{\sqrt{3}}a\left(\cos(\varphi)\underline{e}_1 - \sin(\varphi)\underline{e}_2\right)\delta\varphi$$

$$\delta\underline{r}_F = \frac{\partial\underline{r}_F}{\partial\varphi}\delta\varphi = \frac{4}{3}a\left(-\sin(\varphi)\underline{e}_1 - \cos(\varphi)\underline{e}_2\right)\delta\varphi$$

- Berechnung der Lagerkraft A, wie folgt:

$$\begin{aligned}
\delta W &= A\underline{e}_1\cdot\delta\underline{r}_A|_{\varphi=0} + F\underline{e}_2\cdot\delta\underline{r}_F|_{\varphi=0}\\
&= A\underline{e}_1\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}a\left(\cos(0)\underline{e}_1 - \sin(0)\underline{e}_2\right)\delta\varphi\\
&\quad + F\underline{e}_2\cdot\frac{4}{3}a\left(-\sin(0)\underline{e}_1 - \cos(0)\underline{e}_2\right)\delta\varphi\\
&= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}aA - \frac{4}{3}aF\right)\delta\varphi = 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\quad A = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}F$$

$$A = \frac{2}{3}\sqrt{3}F = \frac{2}{\sqrt{3}}F$$

(b) Gesucht ist der Ortsvektor $\underline{r}_F = \underline{r}_S$ zum gemeinsamen Angriffspunkt der Kräfte F und S.

$$\underline{r}_F = \frac{4}{3}a\left(\cos(\varphi)\underline{e}_1 - \sin(\varphi)\underline{e}_2\right)$$

$$\underline{r}_F = \underline{r}_S$$

- Berechnung der Variationen $\delta\underline{r}_F$ und $\delta\underline{r}_F$

$$\delta\underline{r}_F = \delta\underline{r}_S = \frac{4}{3}a\left(-\sin(\varphi)\underline{e}_1 - \cos(\varphi)\underline{e}_2\right)\delta\varphi$$

• Bestimmung der Stabkraft S mithilfe des PdvV:

Die Kraft S liegt in Richtung eines Vektors $\underline{e}_S$. Dieser Vektor läßt sich durch $\underline{e}_1$ und $\underline{e}_2$ folgendermaßen ausdrücken.

$$\underline{e}_S = \cos(\alpha)\underline{e}_2 - \sin(\alpha)\underline{e}_1$$

Da $\alpha = 30°$ wegen $\tan\alpha = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, ergibt sich für $\underline{e}_S$:

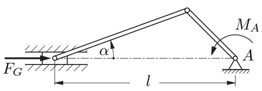
$$\underline{e}_S = -\frac{1}{2}\underline{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\underline{e}_2$$

Damit ist S:

$$\underline{S} = S\underline{e}_S = S\left(-\frac{1}{2}\underline{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\underline{e}_2\right)$$
$$\delta W = F\underline{e}_2 \cdot \delta\underline{r}_F|_{\varphi=0} + \underline{S} \cdot \delta\underline{r}_S|_{\varphi=0}$$
$$= -\frac{4}{3}aF - \frac{4}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2}S = 0$$
$$\Rightarrow \quad S = -\frac{2}{\sqrt{3}}F$$

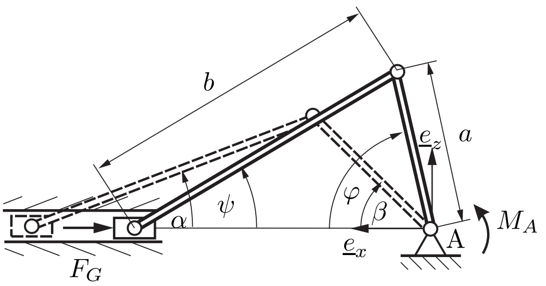
Aufgabe 10

Bei einem Kolbenkompressor wirke in der skizzierten Stellung auf die Kolbenfläche die Gaskraft F_G. Auf die rechte Stange wirkt das Antriebsmoment M_A. Bestimmen Sie mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen die Gleichgewichtslage (Winkel α), wenn die Reibungskräfte vernachlässigt werden.



Geg.: F_G, l, M_A

Nach einer gedachten Verschiebung (Drehung) werden die Ortsvektoren zu den Kraftangriffspunkten in der ausgelenkten Lage aufgestellt und anschließend um die Gleichgewichtslage $\psi = \alpha$, bzw. $\beta = \varphi$ variiert. Das Aufstellen der virtuellen Arbeit liefert die gesuchte Gleichgewichtslage.



Die Belastungsgrößen, Ortsvektoren und ihre Variationen:

$$\underline{r}_F = (a\cos\varphi + b\cos\psi)\underline{e}_x \tag{85}$$
$$\delta\underline{r}_F = (-a\sin\varphi|_{\varphi=\beta}\delta\varphi - b\sin\psi|_{\psi=\alpha}\delta\psi)\underline{e}_x \tag{86}$$
$$\underline{\varphi} = -\varphi\underline{e}_y; \quad \underline{M}_A = M_A\underline{e}_y; \quad \underline{F}_G = -F_G\underline{e}_x; \tag{87}$$
$$\delta\underline{\varphi} = -\delta\varphi\underline{e}_y \tag{88}$$

Kinematische Beziehung:

$$a\sin\varphi = b\sin\psi \tag{89}$$
$$a\cos\varphi|_{\varphi=\beta}\delta\varphi = b\cos\psi|_{\psi=\alpha}\delta\psi \tag{90}$$
$$\delta\psi = \frac{a\cos\beta}{b\cos\alpha}\delta\varphi \tag{91}$$
$$\delta\underline{r}_F = \left(-a\sin\beta - a\sin\alpha\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)\delta\varphi\underline{e}_x \tag{92}$$

Virtuelle Arbeit:

$$\delta A = \underline{F}_G \cdot \delta\underline{r}_F + \underline{M}_A \cdot \delta\underline{\varphi} = 0 \tag{93}$$
$$\left(F_G a\left(\sin\beta + \sin\alpha\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right) - M_A\right) = 0 \tag{94}$$

außerdem gilt:

$$b\sin\alpha = a\sin\beta \tag{95}$$
$$b\cos\alpha + a\cos\beta = l \tag{96}$$

eingesetzt ergibt es:

$$F_G\left(b\sin\alpha\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} + a\sin\alpha\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right) - M_A = 0 \tag{97}$$
$$F_G\left(b\tan\alpha\cos\alpha + a\tan\alpha\cos\beta\right) - M_A = 0 \tag{98}$$
$$F_G\tan\alpha\left(b\cos\alpha + a\cos\beta\right) - M_A = 0 \tag{99}$$
$$\tan\alpha = \frac{M_A}{F_G l}, \tag{100}$$
$$\text{also:} \quad \alpha = \arctan\frac{M_A}{F_G l}. \tag{101}$$

Aufgabe 14

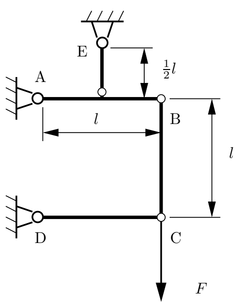
Die abgebildete Konstruktion besteht aus drei starren Balken (AB, BC und CD) und einer Stütze, die in der Mitte des Balkens AB angebracht ist.

Zur Dimensionierung der Stütze soll die Kraft in der Stütze bestimmt werden.

Führen Sie die Berechnungen auf zwei verschiedenen Wegen durch:

(a) Schneiden Sie frei und berechnen Sie die gesuchte Kraft mittels Kräfte- und Momentengleichgewichten.

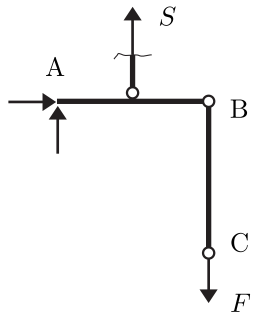
(b) Nutzen Sie das Prinzip der virtuellen Verückungen zur Bestimmung der gesuchten Kraft.



Geg.: F, l

(a) Elementare Mechanik:

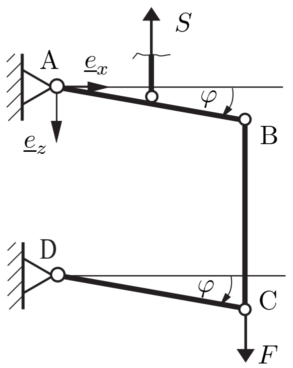
Zur Lösung der Aufgabe werden die Gleichgewichtsbedingungen genutzt. Zudem ist durch einen Knotenschnitt am Punkt C zu erkennen, daß es sich beim Stab CD um einen Nullstab handelt. Daher reicht der skizzierte Freischnitt, um mittels Momentengleichgewicht bezüglich des Punktes A auf die gesuchte Stabkraft S zu schließen.



$$\sum M^A = 0 \Rightarrow \underline{\underline{S = 2F}} \tag{102}$$

(b) Analytische Mechanik:

Zur Berechnung der Stabkraft wird das Prinzip der virtuellen Verrückungen genutzt. Dabei wird zunächst die gesuchte Kraft durch einen Freischnitt sichtbar gemacht, wodurch das System einen Pseudofreiheitsgrad erhält. Nach einer gedachten Verschiebung (Drehung) werden die Ortsvektoren zu den Kraftangriffspunkten in der ausgelenkten Lage aufgestellt und anschließend um die Gleichgewichtslage $\varphi = 0$ variiert. Das Aufstellen der virtuellen Arbeit liefert die gesuchte unbekannte Stabkraft.



Ortsvektoren:

$$\underline{r}_S = \frac{l}{2}\cos\varphi\underline{e}_x + \frac{l}{2}\sin\varphi\underline{e}_z \tag{103}$$

$$\underline{r}_F = l\cos\varphi\underline{e}_x + (l + l\sin\varphi)\underline{e}_z \tag{104}$$

Variation:

$$\delta\underline{r}_S = -\frac{l}{2}\sin\varphi\Big|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_x + \frac{l}{2}\cos\varphi\Big|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_z = \underline{\underline{\frac{l}{2}\delta\varphi\underline{e}_z}} \tag{105}$$

$$\delta\underline{r}_F = -l\sin\varphi|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_x + l\cos\varphi|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_z = \underline{\underline{l\delta\varphi\underline{e}_z}} \tag{106}$$

Prinzip der virtuellen Verrückungen:

$$\delta W = \underline{F}\cdot\delta\underline{r}_F + \underline{S}\cdot\delta\underline{r}_S = 0 \tag{107}$$

$$(Fl - \frac{Sl}{2})\delta\varphi = 0 \Rightarrow \underline{\underline{S = 2F}} \tag{108}$$