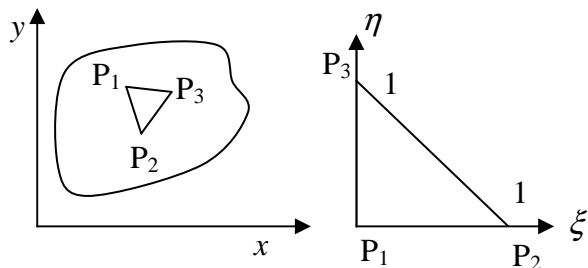


I. 2D-FE am Beispiel einer Membran

Potentielle Energie einer Membran hat die Form

$$U = \frac{S}{2} \int \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy, \text{ wobei } S \text{ die}$$

Spannkraft pro Längeneinheit ist.



$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta \end{cases}$$

$$dx dy = J d\xi d\eta$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) \\ (x_3 - x_1) & (y_3 - y_1) \end{vmatrix} -$$

Jakobi-Determinante.

Konvention: $\frac{\partial u}{\partial x} \equiv u_x, \frac{\partial u}{\partial y} \equiv u_y, \dots$

$$\begin{cases} u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \\ u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = (x_2 - x_1)\xi_x + (x_3 - x_1)\eta_x \\ 0 = (y_2 - y_1)\xi_y + (y_3 - y_1)\eta_y \\ 0 = (x_2 - x_1)\xi_x + (x_3 - x_1)\eta_x \\ 1 = (y_2 - y_1)\xi_y + (y_3 - y_1)\eta_y \end{cases}$$

$$\xi_x = \frac{y_3 - y_1}{J}, \eta_x = -\frac{y_2 - y_1}{J},$$

$$\xi_y = -\frac{x_3 - x_1}{J}, \eta_y = \frac{x_2 - x_1}{J}.$$

$$\int (u_x^2 + u_y^2) dx dy = a \int u_\xi^2 d\xi d\eta +$$

$$2b \int u_\xi u_\eta d\xi d\eta + c \int u_\eta^2 d\xi d\eta$$

$$\begin{cases} a = [(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2] / J \\ b = -[(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) + (y_3 - y_1)(y_2 - y_1)] / J \\ c = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] / J \end{cases}$$

Linearer Ansatz:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta$$

$$u = u_1 + (u_2 - u_1)\xi + (u_3 - u_1)\eta =$$

$$u_1 \underbrace{(1 - \xi - \eta)}_{N_1} + u_2 \underbrace{\xi}_{N_2} + u_3 \underbrace{\eta}_{N_3}$$

$$\begin{cases} u_1 = \alpha_1 & \alpha_1 = u_1 \\ u_2 = \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2 = u_2 - u_1 \\ u_3 = \alpha_1 + \alpha_3 & \alpha_3 = u_3 - u_1 \end{cases}$$

$$u_\xi = u_2 - u_1, \quad u_\eta = u_3 - u_1$$

$$I_1 = \int u_\xi^2 d\xi d\eta = (u_2 - u_1)^2 / 2 = (u_1^2 - 2u_1 u_2 + u_2^2) / 2$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_2 = 2 \int u_\xi u_\eta d\xi d\eta = 2 \frac{1}{2} (u_2 - u_1)(u_3 - u_1) =$$

$$= \frac{1}{2} (2u_1^2 - 2u_1 u_3 - 2u_1 u_2 + 2u_2 u_3)$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \int u_\eta^2 d\xi d\eta = \frac{1}{2} (u_3 - u_1)^2 = \frac{1}{2} (u_3^2 - 2u_3 u_1 + u_1^2)$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\int (u_x^2 + u_y^2) dx dy = \vec{u}^T S \vec{u} \quad \text{mit}$$

$$S = aS_1 + bS_2 + cS_3$$

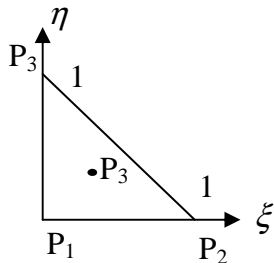
II. Kubischer Ansatz im Dreieck

Potentielle Energie einer Platte ist

$$U_{\text{Platte}} = \frac{Eh^3}{24(1+\nu^2)} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left\{ \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right\} \right] dx dy$$

Wenn wir Gleichgewicht einer Platte suchen, so müssen Verschiebungen und Ableitungen kontinuierlich sein. In jedem Knoten gibt es drei Knotenvariablen, insgesamt 9. Aber es gibt keinen (vollen) Ansatz mit 9 Koeffizienten. Kubischer Ansatz würde 10 Koeffizienten enthalten. Deshalb führen wir eine weitere Variable – Verschiebung im Schwerpunkt des Elements (1/3 jeweiliger Kante) ein.

$$u_1, u_{1x}, u_{1y}, u_2, u_{2x}, u_{2y}, u_3, u_{3x}, u_{3y}, u_4$$



$$u(\eta, \xi) = c_1 + c_2 \xi + c_3 \eta + c_4 \xi^2 + c_5 \xi \eta + c_6 \eta^2 + c_7 \xi^3 + c_8 \xi^2 \eta + c_9 \xi \eta^2 + c_{10} \eta^3$$