Energiemethoden der Mechanik / Prof. Popov / Vorlesung 10.

Das Verfahren von Castigliano.

Lit: Ostermeyer 25.3

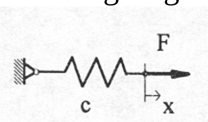
I. Erster Satz von Castigliano.

Verallgemeinerte Kräfte bekommt man als Ableitungen der potentiellen Energie nach verallgemeinerten Koordinaten: $\dfrac{\partial U}{\partial q_i} = -Q_i$.

Dieser Satz, den wir schon mehrmals benutzt haben, heißt *der erste Satz von Castigliano.*

II. Zweiter Satz von Castigliano.

Betrachten wir eine Feder, an der mit der Kraft F gezogen wird.



F ist hier die *äußere Kraft*

Es gilt: $F = cx$, $x = \dfrac{F}{c}$, $U = \dfrac{1}{2}cx^2 \Rightarrow$

$U = \dfrac{F^2}{2c}$. Daraus folgt: $\boxed{\dfrac{\partial U}{\partial F} = \dfrac{F}{c} = x}$.

D.h. *die Koordinate ist Ableitung der potentiellen Energie nach der Kraft.* Diese Behauptung ist der 2. Satz von Castigliano. <u>Eine genauere Formulierung siehe unten!</u>

III. Eine allgemeine Herleitung des 2. Satzes von Castigliano.

$U(q_1, q_2, ..q_s)$ sei die potentielle Energie eines Systems mit s Freiheitsgraden. Das volle Differential der potentiellen Energie ist

$$dU(q_1, q_2, ..q_s) = \sum \frac{\partial U}{\partial q_i} dq_i \, .$$

$\dfrac{\partial U}{\partial q_i} = -Q_i$ sind generalisierte Kräfte. Um das System in diesem Zustand im Gleichgewicht zu halten, müssen *äußere* generalisierte Kräfte $\dfrac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i^{ext}$ angebracht werden. Somit:

$dU = \sum Q_i^{ext} dq_i$. Die Summe $\sum Q_i^{ext} dq_i$ kann transformiert werden:

$$dU = \sum Q_i^{ext} dq_i = d\left(\sum Q_i^{ext} q_i\right) - \sum q_i dQ_i^{ext} \, .$$

Daraus folgt: $d\left(\sum Q_i^{ext} q_i - U\right) = \sum q_i dQ_i^{ext}$.

Der Ausdruck $\tilde{U} = \sum Q_i^{ext} q_i - U$ heißt ***komplementäre Energie.***

Mit dieser Größe gilt $d\tilde{U} = \sum q_i dQ_i^{ext}$.

Daraus folgt $q_i = \dfrac{\partial \tilde{U}}{\partial Q_i^{ext}}$:

Der 2. Satz von Castigliano: $q_i = \dfrac{\partial \tilde{U}}{\partial Q_i^{ext}}$

Generalisierte Verschiebungen bekommt man als partielle Ableitungen der komplementären Energie nach generalisierten *äußeren* Kräften.

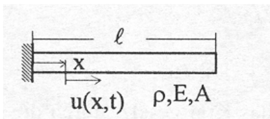
<u>Wichtige Bemerkung</u>: Im Fall von *linear* elastischen Systemen sind die *komplementäre Energie und die potentielle Energie gleich.*

<u>Beispiel:</u> Für eine Feder ist

$$\tilde{U} = xF - U = cx^2 - \frac{cx^2}{2} = \frac{cx^2}{2} = \frac{F^2}{2c} = U \, .$$

Der 2. Satz von Castigliano *<u>für linear elastische Systeme</u>*: *Die generalisierten Verschiebungen sind gleich den partiellen Ableitungen der potentiellen Energie, ausgedrückt als Funktion von generalisierten Kräften, nach generalisierten Kräften.*

Beispiel 1. Ein Dehnstab der Länge l mit der Dehnsteifigkeit EA hat die potentielle Energie



$$U = \frac{1}{2}\int_0^l AEu'^2 \, dx \, .$$

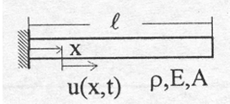
Mit $N(x) = EAu'(x)$ erhält man die potentielle Energie

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N(x)^2}{EA} dx \, .$$

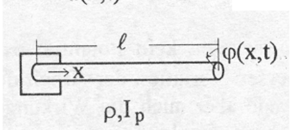
$N(x)$ ist der Normalkraftverlauf im Stab. Greift am Ende des Stabes eine Kraft F an, so ist $N(x) = F$. $\Rightarrow$ $U = \dfrac{F^2 l}{2EA}$.

Die Verschiebung des Angriffspunktes von F in Richtung F: $x = \dfrac{\partial U}{\partial F} = \dfrac{Fl}{EA}$.

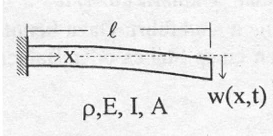
IV. Komplementäre Energien für verschiedene Systeme



$$\boxed{U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N(x)^2}{EA} dx}$$



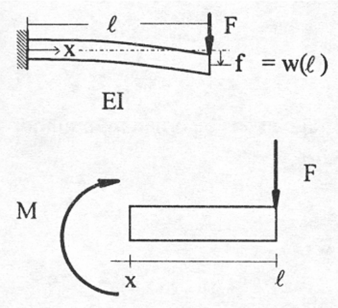
$$\boxed{U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_t(x)^2}{GI_p} dx}$$



$$\boxed{U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M(x)^2}{EI} dx}$$

Hier haben wir die Formeln für die Energie eines Torsionsstabes $\left(U = \int_0^l \frac{GI_p}{2} \theta'^2 dx \right)$ und eines Biegebalkens $\left(U = \frac{1}{2} \int_0^l EIw''^2(x) dx \right)$ benutzt sowie die Beziehungen $M_t = I_p \theta'$ für einen Torsionsstab und $M = -EIw''$ für einen Biegebalken.

Beispiel 2. Man berechne die Absenkung des skizzierten Kragbalkens unter der Kraft *F*.



<u>*Lösung:*</u> Freischneiden des Balkens bei *x* liefert den Momentenverlauf

$M(x) = -F(l-x)$

Die potentielle Energie ist

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{F^2 (l-x)^2}{EI} dx = \frac{1}{2} \frac{F^2 l^3}{3EI}$$

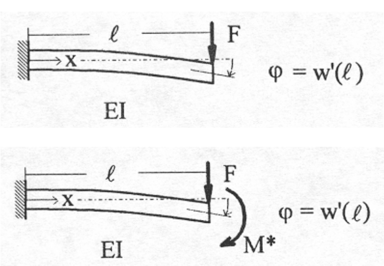
$$\Rightarrow \boxed{w(l) = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{Fl^3}{3EI}}.$$

<u>Anmerkung:</u> Der große Vorteil des Satzes von Castigliano ist die Berechnung der Verformung, ohne die Biegedifferentialgleichung lösen zu müssen!

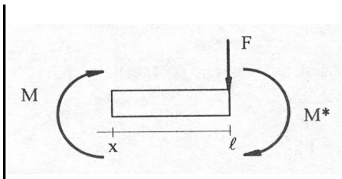
V. Berechnung von Verschiebungen an Stellen, wo keine Kräfte angreifen

Interessiert man sich für Verformungen an Stellen eines elastischen Systems, an denen keine Kräfte oder Momente angreifen, so bringt man eine Kraft oder ein Moment an dieser Stelle an, berechnet die gewünschte Verformung und bringt in dieser dann den Einfluss der zusätzlichen Kraftgröße wieder zum Verschwinden, indem die Kraft oder das Moment gleich Null gesetzt wird.

<u>**Beispiel 3.**</u> Man berechne den Endwinkel des skizzierten Kragbalkens unter der Kraft *F*.



<u>*Lösung:*</u> Einem Winkel ist als verallgemeinerte Kraft ein Kraftmoment zugeordnet. Also bringen wir am Ende ein Moment M^* ein.



Freischneiden bei *x* liefert den Momentverlauf

$M(x) = -F(l-x) - M^*$ Die Ableitung der Formänderungsenergie nach M^* liefert

$$\varphi(l) = \frac{\partial U}{\partial M^*} = \frac{\partial}{\partial M^*} \left(\frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx \right) = \int_0^l \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M^*} dx =$$

$$\int_0^l \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M^*} dx = \int_0^l \frac{(-F(l-x) - M^*)}{EI} (-1) dx =$$

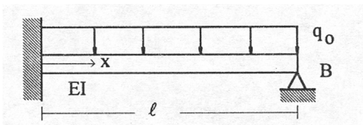
$$\left. \frac{-F(l-x)^2 - M^* x}{2EI} \right|_{x=0}^{x=l} = \frac{Fl^2 - M^* l}{2EI}$$

Bei $M^* = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi(l) = \frac{Fl^2}{2EI}}$.

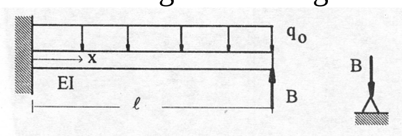
VI. Berechnung von Lagerkräften mit dem Satz von Castigliano.

Ist die Verformung vorgegeben, kann man mit dem Satz von Castigliano die dazugehörigen Kräfte berechnen.

Beispiel 4. Gegeben sei ein links eingespannter Balken mit einer konstanten Streckenlast q_0. Gesucht ist die Lagerkraft bei B.



<u>*Lösung:*</u> Freischneiden des Systems am Lager B macht die gesuchte Lagerkraft sichtbar.



Das System ist statisch unbestimmt: Kräftegleichgewicht am Gesamtsystem reicht nicht aus zur Bestimmung von Lagerreaktionen. Man kann die Aufgabe durch Lösung der Biegedifferentialgleichung lösen. Oder man benutzt die Castigliano-Methode: Man berechnet die resultierende Verschiebung unter der Wirkung der Kraft *B*. Und diese Verschiebung muss verschwinden: $\partial U / \partial B = 0$.

$$M(x) = B(l-x) - \frac{1}{2} q_0 (l-x)^2 .$$

$$\frac{\partial U}{\partial B} = \int_0^l \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial B} dx = \frac{1}{EI} \int_0^l \left[B(l-x)^2 - \frac{1}{2} q_0 (l-x)^3 \right] dx =$$

$$\frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} Bl^3 - \frac{1}{8} q_0 l^4 \right] = 0$$

Daraus folgt $B = \frac{3}{8} q_0 l$.