Energiemethoden der Mechanik / Prof. Popov / Vorlesung 5.
I. Zwangskräfte (Fortsetzung)
II. Potentielle und kinetische Energie eines elastischen Stabes, Eigenschwingungen

I. Lagrangesche Gleichungen 1. Art für ein System mit mehreren Bindungen

Gibt es in einem mechanischen System mit der Lagrangefunktion L r Bindungen, die mittels der Bindungsgleichungen

$g_k(q_1,...,q_s)=0$, $k=1,...,r$

dargestellt werden können, so haben die Bewegungsgleichungen die Form:

Lagrangesche Gleichungen 1. Art

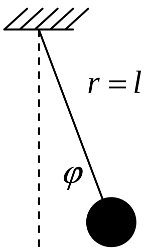
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}=Q_i+\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\frac{\partial g_k}{\partial q_i}$$

$$g_1(q_1,q_2,...,q_s)=0$$

....

$$g_r(q_1,q_2,...,q_s)=0$$

Beispiel: Ein Pendel. Man stelle die Bewegungsgleichungen auf und gebe die Stangenkraft an.



Lösung: Die Lagrangefunktion *ohne Berücksichtigung der Zwangsbedingung* ist

$$L=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2+mgr\cos\varphi$$

Die Zwangsbedingung ist $r-l=0$, somit $g(r,\varphi)=r-l$.

Die Lagrangegleichungen sind:

1) $m\ddot{r}-mr\dot{\varphi}^2-mg\cos\varphi=\lambda\frac{\partial g}{\partial r}=\lambda$

2) $mr^2\ddot{\varphi}+2mr\dot{r}\dot{\varphi}+mgr\sin\varphi=\lambda\frac{\partial g}{\partial \varphi}=0$

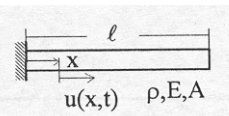
3) $r-l=0 \;\Rightarrow\; \ddot{r}=0$.

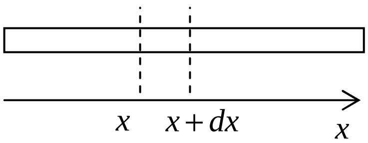
Die zweite Gleichung ist die gesuchte Bewegungsgleichung und die erste gibt die Zwangskraft an:

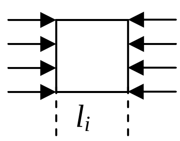
$$F_r=\lambda\frac{\partial g}{\partial r}=-mr\dot{\varphi}^2-mg\cos\varphi.$$

II. Kontinuierliche Medien

A. Potentielle und kinetische Energie eines deformierten Stabes







Spannung: $\sigma=E\varepsilon=E\frac{\partial u}{\partial x}$. Kraft:

$$F_i=A\sigma_i=AE\varepsilon_i=AE\frac{\Delta l_i}{l_i}=\frac{AE}{l_i}\Delta l_i=k\Delta l_i\Rightarrow$$

Steifigkeit eines Elementes: $k=\frac{AE}{l_i}$.

Potentielle Energie eines Elementes:

$$U_i=k\frac{\Delta l_i^{\,2}}{2}=\frac{AE}{2l_i}\Delta l_i^{\,2}=\frac{AE}{2}\frac{\Delta l_i^{\,2}}{l_i^2}l_i=$$

$$=\frac{AE}{2}\varepsilon_i^{\,2}l_i=\frac{AE}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^2 l_i$$

Potentielle Energie des ganzen Stabes:

$$U=\sum_i U_i=\sum_i\frac{AE}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^2 l_i$$

oder

$$\boxed{U=\int_0^l\frac{AE}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dx=\int_0^l\frac{AE}{2}u'^2dx}$$

Kinetische Energie des Stabes:

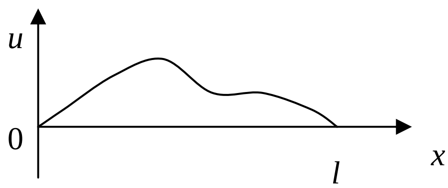
$$\boxed{K=\int_0^l dm\frac{v^2}{2}=\int_0^l\rho A\frac{\dot{u}^2}{2}dx}.$$

Lagrangefunktion:

$$L=\int_0^l\left(\rho A\frac{\dot{u}^2}{2}-\frac{AE}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)dx$$

B. Lagrangefunktion eines elastischen Stabes in Fourier-Darstellung

Betrachten wir einen an beiden Enden festgespannten elastischen Stab der Länge l (Randbedingungen $u(0)=0$, $u(l)=0$):



Mit welchen generalisierten Koordinaten kann man einen Stab beschreiben?

<u>Erste Möglichkeit:</u> $u(x)$; hier spielt u die Rolle von generalisierten Koordinaten und x die Rolle des Indexes i, welcher die Koordinaten nummeriert.

<u>Zweite Möglichkeit:</u> Jede nicht singuläre Funktion kann auf dem Intervall $(0,l)$ in eine Taylor-Reihe entwickelt werden:

$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(t)x^n$. Die Entwicklungskoeffizienten a_n können als generalisierte Koordinaten gewählt werden.

Dritte Möglichkeit: Jede Funktion, die den Randbedingungen $u(0)=0$, $u(l)=0$ genügt, kann auf dem Intervall $(0,l)$ in eine Fourier-Reihe entwickelt werden:

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(t)\sin\frac{\pi nx}{l}.$$

Die Fourier-Koeffizienten a_n können ebenfalls als generalisierte Koordinaten gewählt werden.

Weitere Möglichkeiten:

$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(t)\varphi_n(x)$, wobei $\varphi_n(x)$ ein *voller* Satz von Basisfunktionen (es gibt verschiedene).

Betrachten wir die dritte Wahl der generalisierten Koordinaten näher:

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(t)\sin\frac{\pi nx}{l}.$$

Wir leiten die Bewegungsgleichungen für die generalisierten Koordinaten a_n her. Zu diesem Zweck muss die Lagrange-Funktion des Stabes

$L=\frac{1}{2}\int_0^l\left(\rho A\dot{u}^2-AEu'^2\right)dx$ als Funktion der generalisierten Koordinaten dargestellt werden. Die Ableitungen sind:

$$\dot{u}(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\dot{a}_n(t)\sin\frac{\pi nx}{l},$$

$$u'(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(t)\left(\frac{\pi n}{l}\right)\cos\frac{\pi nx}{l}$$

$$K=\frac{1}{2}\int_0^l\sum_{n,k=1}^{\infty}\rho A\dot{a}_n\dot{a}_k\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi kx}{l}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho A\dot{a}_n^2 l}{4}$$

$$U=\frac{1}{2}\int_0^l\sum_{n,k=1}^{\infty}AEa_na_k\frac{\pi n}{l}\frac{\pi k}{l}\cos\frac{\pi nx}{l}\cos\frac{\pi kx}{l}dx$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}AEa_n^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 l$$

Die Lagrangefunktion lautet:

$$L=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho A\dot{a}_n^2 l}{4}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}AEa_n^2\frac{\pi^2n^2}{l}.$$

Die Lagrangegleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{a}_n}-\frac{\partial L}{\partial a_n}=0$$

lauten:

$$\rho A\ddot{a}_n l+AEa_n\frac{\pi^2n^2}{l}=0.$$

Diese Gleichung beschreibt harmonische Schwingungen mit der Kreisfrequenz

$$\omega_n=\sqrt{\frac{E}{\rho}}\left(\frac{\pi n}{l}\right).$$

Wir haben heraus gefunden, dass die Bewegungsgleichungen für alle generalisierten Koordinaten a_n unabhängig von einander sind! Die allgemeine Lösung für die Koordinate $a_n(t)$ lautet:

$$a_n(t)=A_n\cos\omega_nt+B_n\sin\omega_nt$$

$$=A_n\cos\sqrt{\frac{E}{\rho}}\left(\frac{\pi n}{l}\right)t+B_n\sin\sqrt{\frac{E}{\rho}}\left(\frac{\pi n}{l}\right)t$$

Wenn wir eine Deformation haben, bei der zum Zeitpunkt $t=0$ nur *eine* Koordinate a_n verschieden von Null war, so ist dies auch zu einem beliebigen späteren Zeitpunkt gültig. In diesem Fall ist die Verschiebung durch den Ausdruck

$$u(x,t)=a_n(t)\sin\frac{\pi nx}{l}$$

gegeben. Diese Funktion heißt die n-te *Eigenform* der Schwingungen des elastischen Stabes. Der Stab oszilliert dabei mit einer konstanten Frequenz $\omega_n=\sqrt{\frac{E}{\rho}}\left(\frac{\pi n}{l}\right)$, welche als n-te *Eigenfrequenz* bezeichnet wird. Die generalisierten Koordinaten a_n heißen *Normalkoordinaten* des Stabes. Die allgemeine Lösung für die n-te Eigenform ist

$$u(x,t)=\left(A_n\cos\sqrt{\frac{E}{\rho}}\left(\frac{\pi n}{l}\right)t+B_n\sin\sqrt{\frac{E}{\rho}}\left(\frac{\pi n}{l}\right)t\right)\sin\frac{\pi nx}{l}$$

mit beliebigen Konstanten A_n und B_n, deren Werte von den Anfangsbedingungen abhängen.

Im zweiten Teil des Kurses, der *Kontinuumsmechanik*, werden wir diese Lösung auf einem anderen Weg, als die sogenannte *Bernoullische Lösung der Wellengleichung*, kennenlernen.