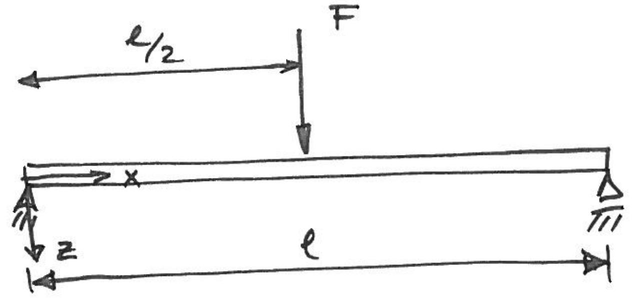
Schnittlasten DGL für mehrere Bereiche

Betrachte:



i) Aufstellen der Streckenlast:

$$q(x) = 0$$

ii) Integration:

$$\underbrace{\int dQ}_{} = \int q(x)\,dx$$

$Q(x)$ hat bei $x = \frac{\ell}{2}$ ~~K~~einen Sprung

$\Rightarrow$ Integration kann dort nicht erfolgen,

Daher teilen wir den Balken in zwei Bereiche:

Bereich I: $0 \le x \le \frac{\ell}{2}$

Bereich II: $\frac{\ell}{2} \le x \le \ell$

I

$$Q_I(x) = \int 0\,dx + C_1$$

$$M_I(x) = C_1 x + C_2$$

II

$$Q_{II}(x) = C_3$$

$$M_{II}(x) = C_3 x + C_4$$

Pro Bereich gibt es zwei Konstanten, d.h., die Anzahl der Rand und Übergangsbedingungen ist:

$$t = 2 \cdot n$$

$n \rightarrow$ Anzahl der Bereiche

$t \rightarrow$ Anzahl der RB/ÜB

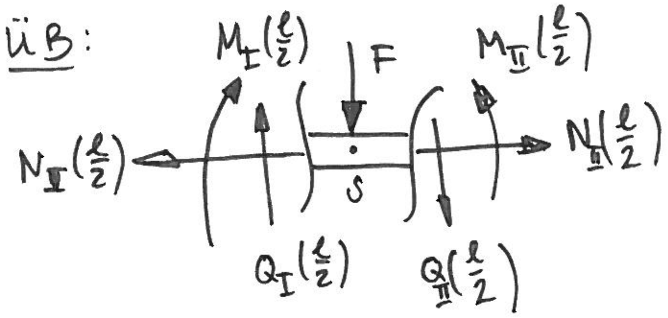
iii) <u>Rand- und Übergangsbedingungen</u> (RB/ÜB)

<u>RB:</u>

$M(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_2 = 0}$

$M(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{-C_3 l = C_4} \quad \odot$

<u>ÜB:</u>



$\sum M^{(S)} = 0 = -M_I(\frac{l}{2}) + M_{II}(\frac{l}{2})$

$\Rightarrow M_I(\frac{l}{2}) = M_{II}(\frac{l}{2}) \quad (*)$

$\sum F_z = 0 = -Q_I(\frac{l}{2}) + Q_{II}(\frac{l}{2}) + F$

$Q_I(\frac{l}{2}) = Q_{II}(\frac{l}{2}) + F \quad (**)$

aus $(**)$ folgt:

$$C_1 = C_3 + F \qquad (***)$$

aus $(*)$ folgt:

$$C_1 \frac{l}{2} = C_3 \frac{l}{2} + C_4 \qquad (****)$$

$(***)$ und $\odot$ in $(****)$:

$$\cancel{C_3 \frac{l}{2}} + F \frac{l}{2} = \cancel{C_3 \frac{l}{2}} - C_3 l$$

$$C_3 = -\frac{F}{2}$$

$$C_4 = \frac{F}{2} l$$

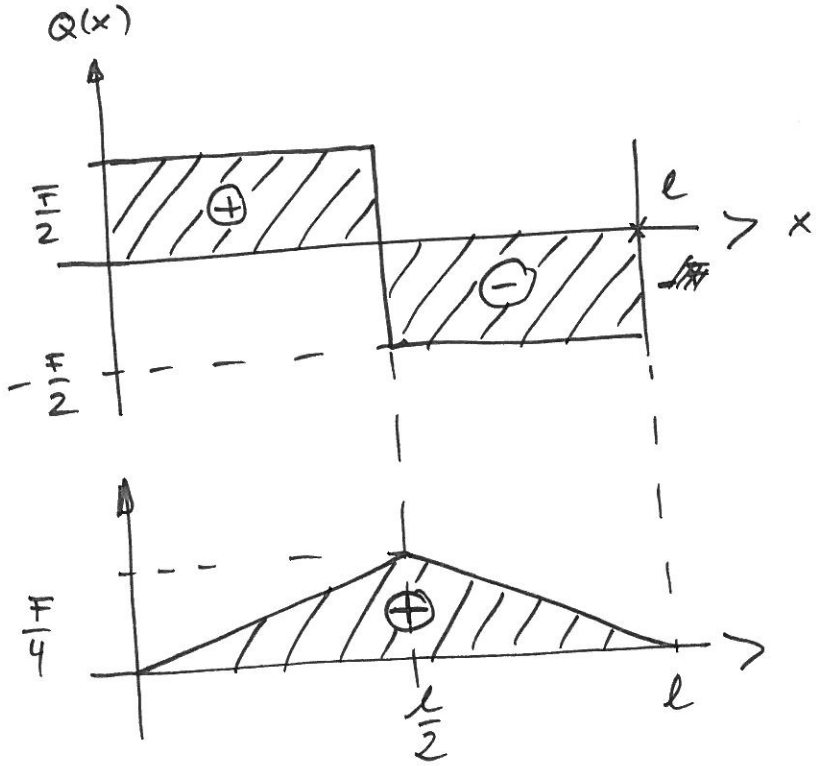
$$C_1 = \frac{F}{2}$$

Für $Q(x)$ und $M(x)$ ergibt sich:

$$Q_I(x) = \frac{F}{2} \qquad Q_{II}(x) = -\frac{F}{2}$$

$$M_I(x) = \frac{F}{2} x \qquad M_{II}(x) = -\frac{F}{2} x + \frac{F}{2} l$$

iv) Graphische Darstellung

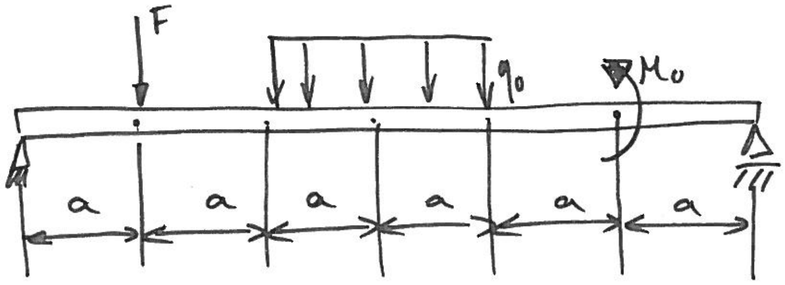


Allgemein gilt:

→ Ist $q(x_i)$ unstetig, so muß bei x_i ein neuer Bereich eingeführt werden

→ Werden Einzellasten bei x_i eingeführt muß dort ebenso ein neuer Bereich beginnen.
(Ein Lager leitet auch eine Einzellast ein)

Bsp:



Dieses Balken hat 5 Bereiche

I: $0 \leq x \leq a$

II: $a < x \leq 2a$

III: $2a < x \leq 4a$

IV: $4a < x \leq 5a$

V: $5a < x \leq 6a$

Qualitativ lässt sich aber der Verlauf von Q(x) und M(x) schon an der Belastung ablesen:

Bereich I: – $Q(x)$ ist konstant, da $q(x) = 0$ ist

– $M(x)$ ist linear, da $Q(x) \neq$ konst. ist

x = a: – $Q(x)$ hat einen Sprung um F

– $M(x)$ hat einen Knick

Bereich II – $Q(x)$ ist konstant

– $M(x)$ ist linear

x = 2a: – $Q(x)$ hat einen Knick, da $q(x)$ einen Sprung hat

Bereich III: – $Q(x)$ ist linear, da $q(x) =$ konst.

– $M(x)$ ist quadratisch, da $Q(x)$ linear ist.

x = 4a: wie x = 2a

Bereich IV: wie Bereich II

x = 5a: – $M(x)$ hat einen Sprung um M_0

Bereich V: wie Bereich I