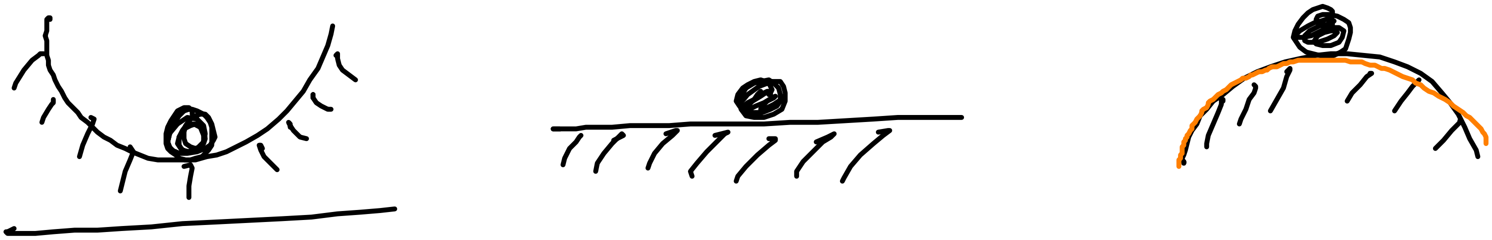
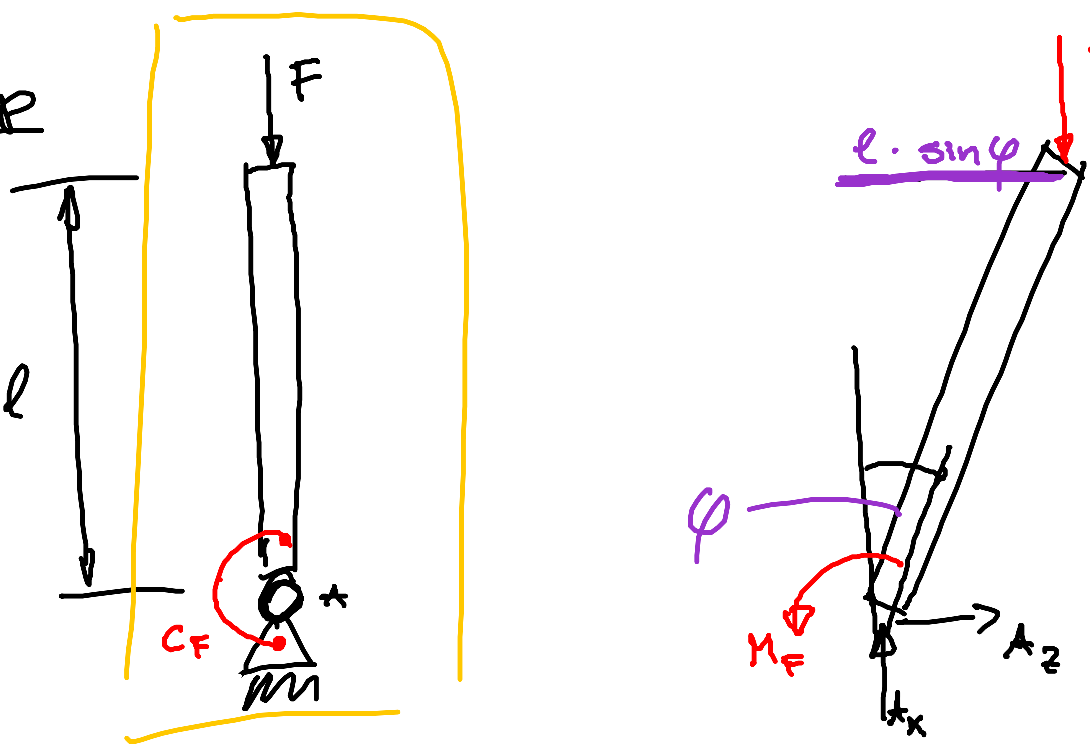
Stabilität



stabiles GGW | indifferentes GGW | instabiles GGW

Bsp



$$M_F = c_F \cdot \varphi$$

$$\Sigma M^{(A)} = 0 = M_F - F l \sin\varphi$$

$$c_F \varphi = F l \sin\varphi \Leftarrow$$

$$\frac{\varphi}{\sin\varphi} = \frac{F\ell}{c_F}$$

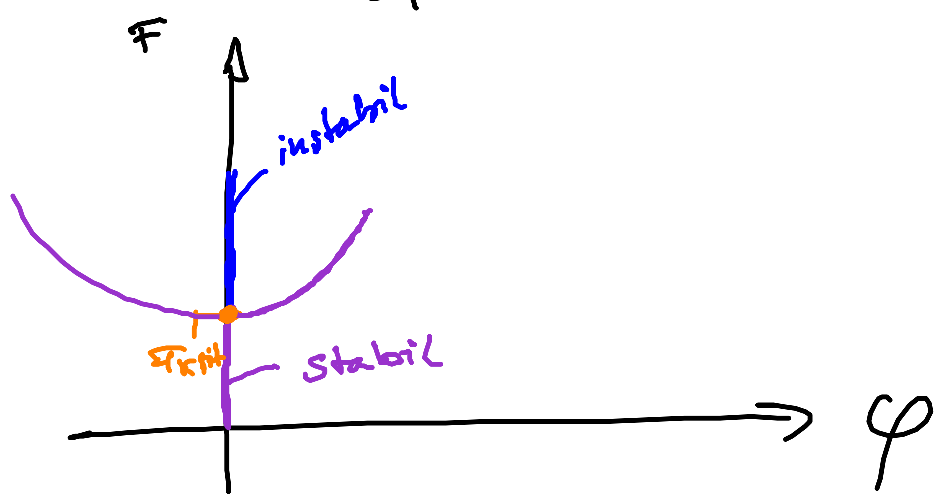
Wann ist diese Gleichung erfüllt?

① $\varphi_1 = 0$

② $\dfrac{\varphi_2}{\sin\varphi_2} = \dfrac{F\ell}{c_F}$ Feder hält System im ausgelenkten Zustand

③ klein φ $\Rightarrow$ $\sin\varphi \approx \varphi$

$$1 = \frac{F_{krit}\,\ell}{c_F} \Rightarrow F_{krit} = \frac{c_F}{\ell}$$

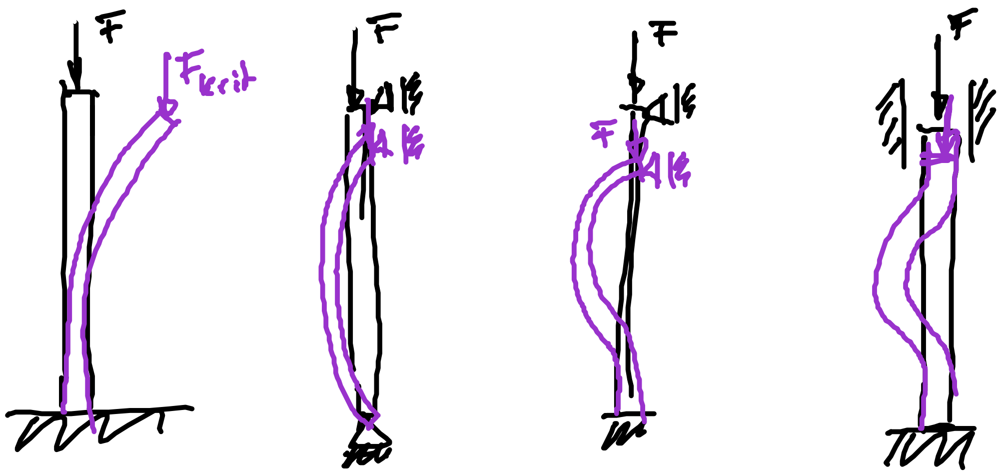


Ab F_{krit} wird $\varphi_1 = 0$ zu einem instabilen GGW, bei einer kleinen Störung springt das System zu einer Lage ~~F~~ φ_2 mit korrespondierender Kraft (siehe ②)

Knickung

Ist ebenfalls ein Stabilitätsproblem

Bsp Eulersche Knickfälle



EULERsche Knickdifferentialgleichung

$$\left(EI\, w''(x)\right)'' = -F\, w''(x)$$

$EI = konst$

$$EI\, w^{IV}(x) = -F\, w''(x)$$

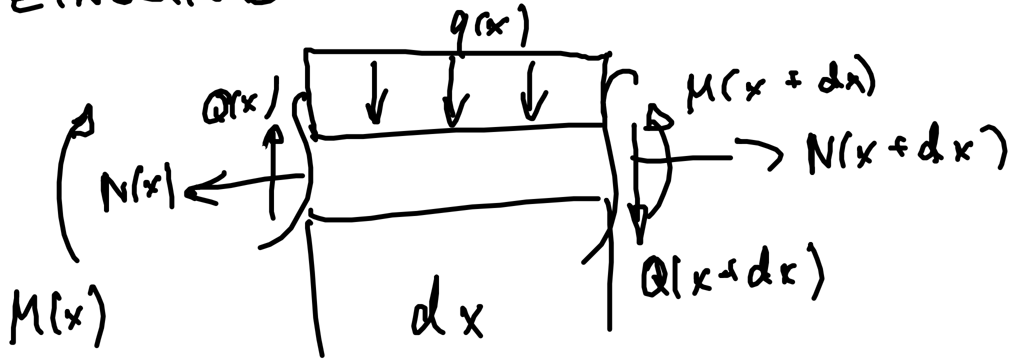
$$\boxed{w^{IV}(x) = -\lambda^2\, w''(x)} \qquad \lambda^2 := \frac{F}{EI}$$

~~Ko~~ diese Gleichung wird hergeleitet mit der Theorie 2. Ordnung

$\sin\varphi \approx \varphi$

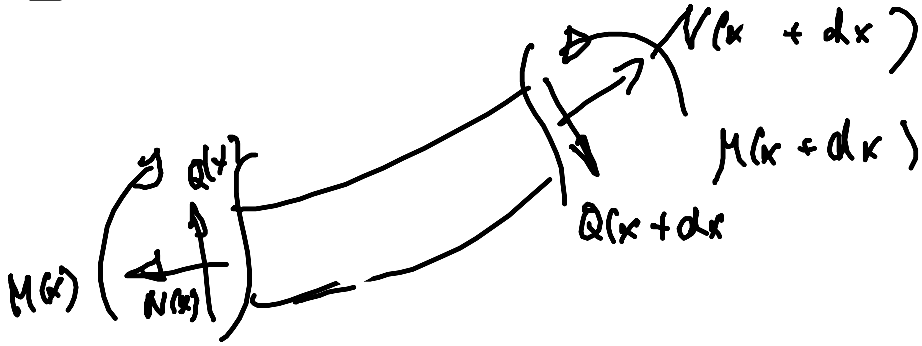
$\cos\varphi \approx 1$

EINSCHUB Theorie 1. ORDNUNG



mit GGW folgen Schnittlastendgl

Theorie 2. Ordnung:



mit GGW folgt die Knickdgl

QUIZ

Durch welchen Term unterscheidet sich die Knickdgl von der Biegliniendgl

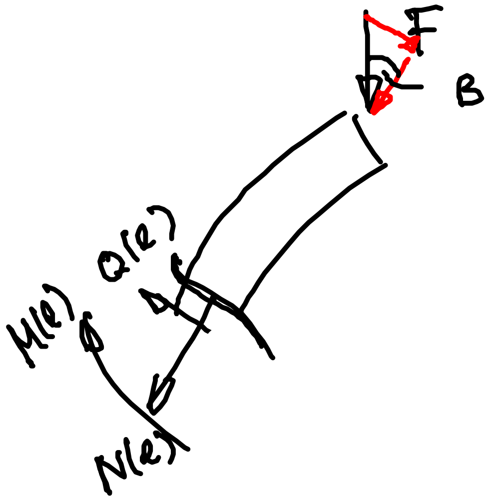
$(EI w'')'' = q(x)$

① $m(x)$

② $n(x)$

③ $\boxed{-F\,w''(x)}$ ⟵

zu ①



$$M(l) = 0 = -EI\,w''(l)$$

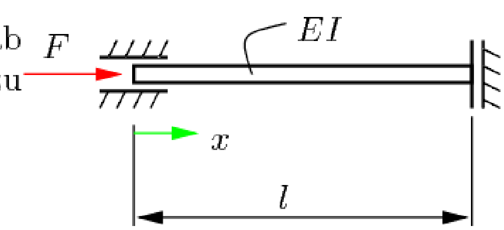
$$F \cdot \underbrace{\sin\beta}_{\approx w'(l)} = Q(l)$$

$$F\,w'(l) = Q(l) = -EI\,w'''(l)$$

Aufgabe 138

138. Für den auf Druck beanspruchten elastischen Stab sind die Knickbedingung und die kritische Last zu bestimmen.

Geg.: l, EI, F



① Knickdgl lösen

$$w^{IV} = -\lambda^2\,\underline{w''}\,. \qquad \lambda^2 = \frac{F}{EI}$$

Allgemeine Lösung:

$$\boxed{w(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x + Cx + D}$$

vier Terme da DGL 4. ORDNUNG

die Terme müssen linear unabhängig voneinander sein

$$\left(x_1 = a\,x \qquad x_2 = b \right.$$

$$x_3 = 4\,ax + 4b$$

$\left. \hookrightarrow x_3 \text{ linear abhängig von } x_1, x_2 \right)$

$$w'(x) = -\lambda A\sin\lambda x + \lambda B\cos\lambda x + C$$

$$\rightarrow w''(x) = -\lambda^2 A\cos\lambda x - \lambda^2 B\sin\lambda x$$

$$w'''(x) = +\lambda^3 A\sin\lambda x - \lambda^3 B\cos\lambda x$$

$$w^{IV}(x) = \lambda^4 A\cos\lambda x + \lambda^4 B\sin\lambda x = -\lambda^2 w''(x)$$

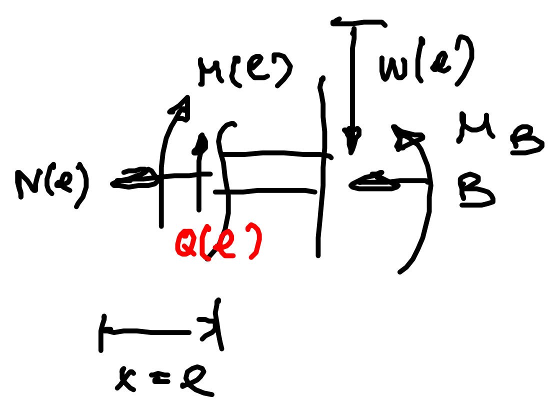
② RB aufstellen

(1) $w(0) = 0$

(2) $w'(0) = 0$

(3) $w'(\ell) = 0$

(4) $Q(\ell) = -EI\,w'''(\ell) = 0$



③ Gleichungssystem aufstellen

mit (1) $\quad A + D = 0$

mit (2) $\quad \lambda B + C = 0 \quad \Rightarrow \boxed{B = 0}\ 0$

mit (3) $\quad \boxed{-A\lambda\sin\lambda\ell + B\lambda\cos\lambda\ell} + \boxed{C = 0}$

mit (4) $\quad \cancel{\lambda^3}\boxed{(-A\sin\lambda\ell + B\cos\lambda\ell)} = 0$

<u>Einschub</u>:

Geo $\quad \lambda = \sqrt{\frac{F}{EI}}$ so dass $A, B, C, D \neq 0$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ -\lambda\sin\lambda\ell & \lambda\cos\lambda\ell & 1 & 0 \\ \sin\lambda\ell & -\cos\lambda\ell & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$$\underline{c} = \underline{0}$$

ist $\det(\underline{\underline{A}}) \overset{!}{=} 0$ hat das System eine nichttriviale Lösung.

$\boxed{\det(A) = f(\lambda)} \qquad \lambda = \lambda(F)$

$$A\sin\lambda\ell = 0$$

~~so~~ $\boxed{A = 0} \Rightarrow$ triviale Lösung

$$\lambda_n\ell = n\pi \qquad n = 1, \dots, \infty$$

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{\ell} \qquad n = 1$$

$$\boxed{\lambda_{krit} = \frac{1\pi}{\ell} = \sqrt{\frac{F_{krit}}{EI}}}$$ Knickbedingung

$$\boxed{\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \cdot EI = F_{krit}}$$

$$\frac{N}{m^2} \quad \frac{m^4}{m^2} = N$$

4 Knickform

$A = -D$

$$w(x) = A \cos\lambda x - \cancel{A}$$

$$w(x) = A(\cos\lambda\ell - 1)$$