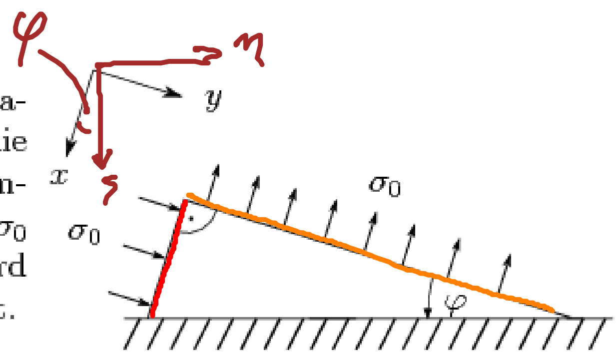
TUT: 21, 110

HA: 79, 93, 112

Nachtrag:

$\underline{\underline{\sigma}}$

Zusatzaufgabe 1



Ein dreieckiges Blech ist an einen horizontalen Träger angeschweißt und wird durch die über die jeweilige Querschnittsfläche konstanten Normalspannungen $\sigma_x = \sigma_0$ und $\sigma_y = -\sigma_0$ belastet. Die Geometrie der Anordnung wird u.a. durch den Winkel $\varphi = 15°$ charakterisiert.

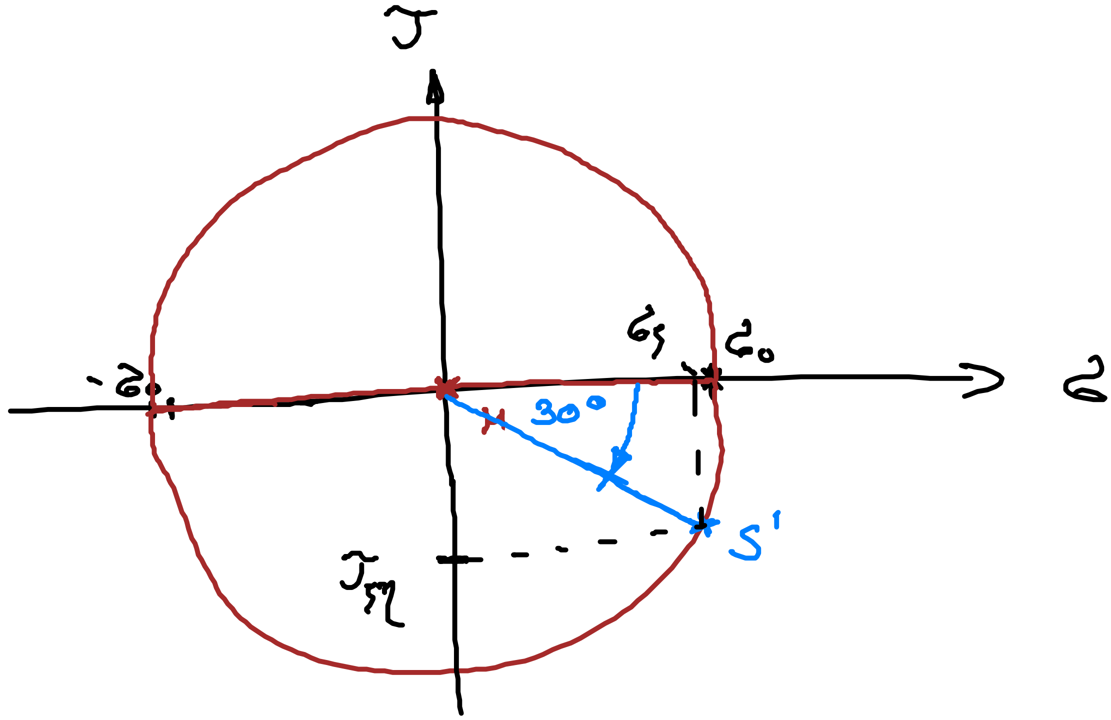
(a) Zeichnen Sie den MOHRschen Kreis und lesen Sie aus diesem die Normal- und Schubspannung in der Schweißnaht ab.

(b) Schneiden Sie nun das Dreieckselement von der Schweißnaht frei und werten Sie das Kräftegleichgewicht am element aus. Verifizieren Sie die Ergebnisse aus Aufgabenteil (a)

Geg.: σ_0, $\varphi = 15°$

a)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}_{xy}$$



$$\sigma_\xi = \sigma_0 \cos 30^\circ = \sigma_0 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\tau_{\xi\eta} = -\sigma_0 \sin 30 = -\frac{\sigma_0}{2}$$

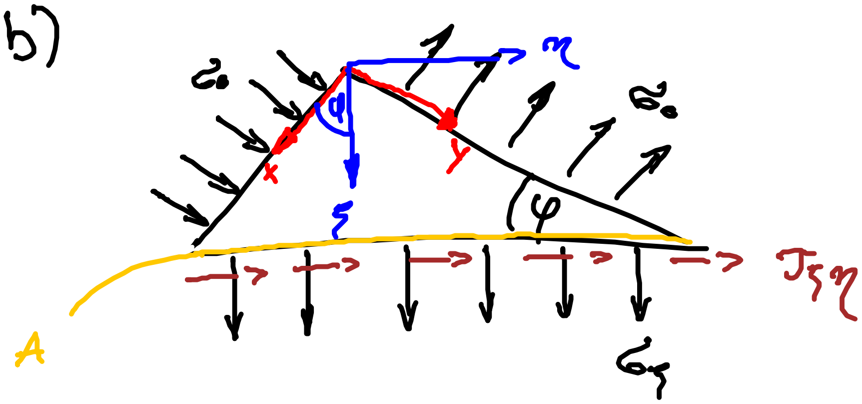
$$\sigma_\xi = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi$$

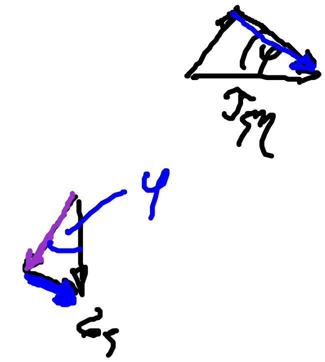
$$\sigma_\xi = 0 + \underline{\underline{\sigma_0 \frac{1}{2}\sqrt{3}}}$$

$$\tau_{\xi\eta} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi$$

$$\underline{\underline{\tau_{\xi\eta} = -\cancel{1}\,\sigma_0 \cdot \frac{1}{2}}}$$

b)





$$(1)\quad \Sigma F_x = 0 = -\tau_0 \cdot \cancel{A} \cos\varphi + \sigma_\xi \cos\varphi \cdot \cancel{A}$$
$$- \tau_{\xi\eta} \sin\varphi \cancel{A}$$

$$(2)\quad \Sigma F_y = 0 = \tau_0 \cancel{A} \sin\varphi + \sigma_\xi \cdot \sin\varphi \cancel{A}$$
$$+ \tau_{\xi\eta} \cos\varphi \cancel{A}$$

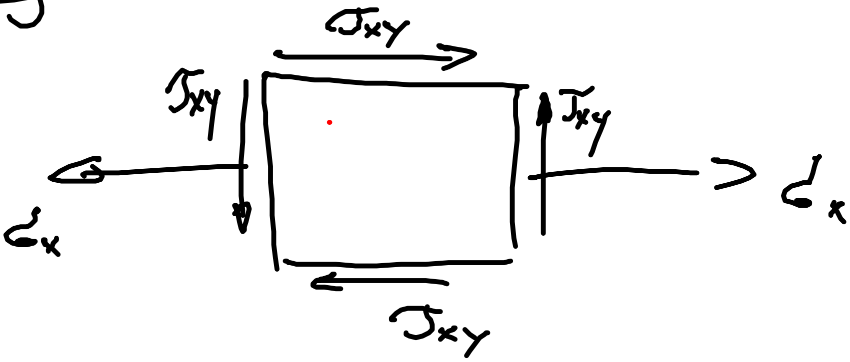
$(1)\cdot\cos\varphi + (2)\sin\varphi$:

$$\tau_0 \cos^2\varphi - \tau_0 \sin^2\varphi = \sigma_\xi (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)$$
$$\sigma_\xi = \tau_0 (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = \tau_0 \cos^{\cancel{2}} 2\varphi$$
$$\boxed{\sigma_\xi = \tau_0 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3}}$$

$(1)\cdot\sin\varphi - (2)\cos\varphi$:

$$2\tau_0 \cos\varphi \sin\varphi = -\tau_{\xi\eta} \sin^2\varphi - \tau_{\xi\eta} \cos^2\varphi$$
$$-\tau_0 \sin 2\varphi = \tau_{\xi\eta}$$
$$\boxed{\tau_{\xi\eta} = -\frac{\tau_0}{2}}$$

Geg.:

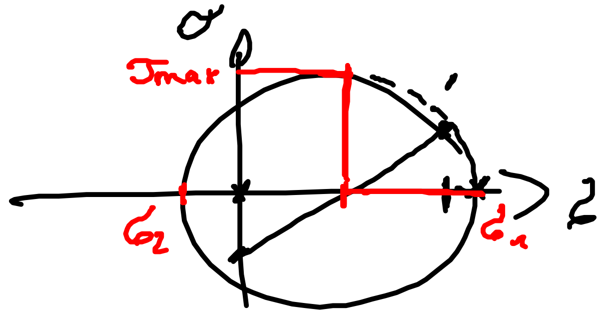


$\sigma_1 \boxed{>} \sigma_x$

Was stimmt?

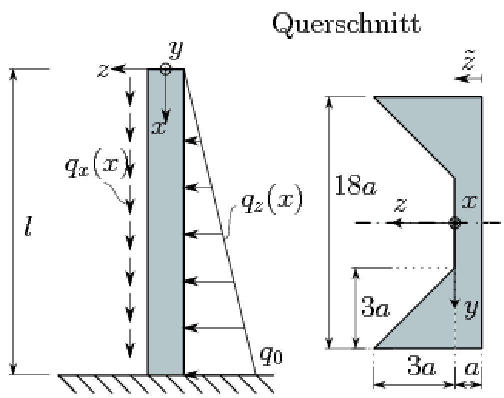
$\tau_{max} = \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2|$

$\tau_{max} = \frac{1}{2}|\sigma_1 + \sigma_2|$



Zusatzaufgabe 2

Eine Lawinenverbauung habe den gezeigten Querschnitt und die Länge $l = 100a$. Neben der Gerölllast $q_z(x)$, die als eine linear bis auf q_0 anwachsende Streckenlast in die z-Richtung modelliert wird, wirkt in die Längsrichtung das konstante längenbezogene Eigengewicht $q_x(x) = \frac{27}{40}q_0$.



(a) Bestimmen sie die Lage des Flächenschwerpunkts des Querschnitts bzgl. der eingezeichneten Koordinate $\tilde{z}$.

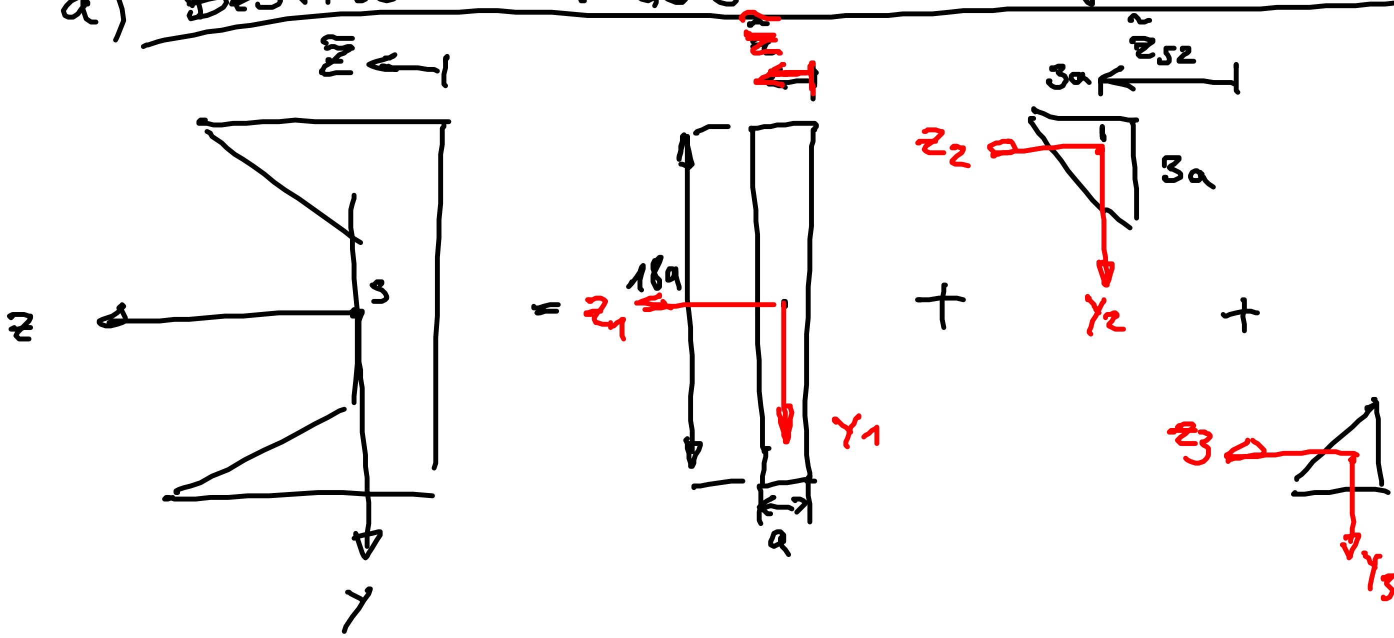
(b) Wie groß ist das Flächenträgheitsmoment I_{yy} des Gesamtquerschnitts bzgl. der y-Achse welche durch den Flächenschwerpunkt verläuft?

(c) Ermitteln Sie den Verlauf der Normalkraft $F_n(x)$, der Querkraft $F_q(x)$ und des Biegemoments $M_b(x)$.

(d) Skizzieren Sie den Verlauf der Biegenormalspannung in der Einspannung ($x = l$). Bestimmen Sie dabei auch die (betragsmäßigen) Maximalwerte der Druck- und Zugspannung $\sigma_{\text{max,Druck}}$ bzw. $\sigma_{\text{max,Zug}}$. Vereinfachend sei angenommen, dass das Flächenträgheitsmoment bzgl. der y-Achse den Wert $I_{yy} \doteq 20a^4$ habe.

Geg.: a, $l = 100a$, q_0, $q_x(x) = \dfrac{27}{40}q_0$

a) Bestimmen des Schwerpunktes



	A_i	$\tilde{z}_i$	$A_i \tilde{z}_i$
1	$18a^2$	$\frac{1}{2}a$	$9a^3$
2	$\frac{9}{2}a^2$	$2a$	$9a^3$
3	$\frac{9}{2}a^2$	$2a$	$9a^3$
Σ	$27a^2$		$27a^3$

$$\tilde{z}_s = \frac{\sum A_i \tilde{z}_i}{\sum A_i} = \underline{\underline{a}}$$

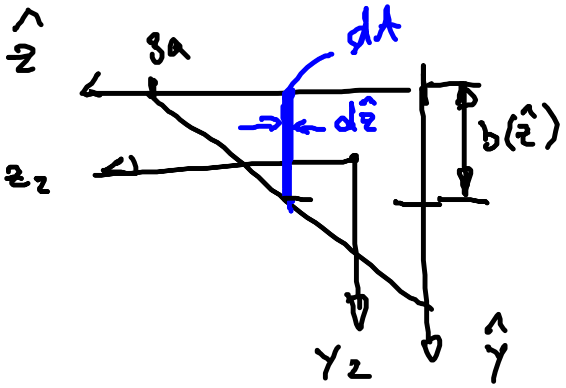
b) Bestimmen des FTM

$$I_y = \sum_{i=1}^{3} \left(I_{yi} + z_{si}^2 A_i \right) \qquad i = 1, \dots, 3$$

	A_i	z_{si}	I_{yi}	$A_i z_{si}^2$
1	$18a^2$	$-\frac{a}{2}$	$\frac{18a \cdot a^3}{12} = \frac{3}{2}a^4$	$\frac{9}{2}a^4$
2	$\frac{9}{2}a^2$	a	$\frac{9}{4}a^4$	$\frac{9}{2}a^4$
3	$\frac{9}{2}a^2$	a	$\frac{9}{4}a^4$	$\frac{9}{2}a^4$
Σ			$\cancel{12}\ 6a^4$	$\frac{27}{2}a^4$

$$\boxed{I_y = \frac{39}{2}a^4}$$

Nebenrechnung I_{y2}



$$I_{y2} = I_{\hat{y}} - \hat{z}_s^2 A_2$$

$$I_{\hat{y}} = \int \hat{z}^2 \, dA$$

$$= \int_0^{3a} \hat{z}^2 \, b(\hat{z}) \, d\hat{z}$$

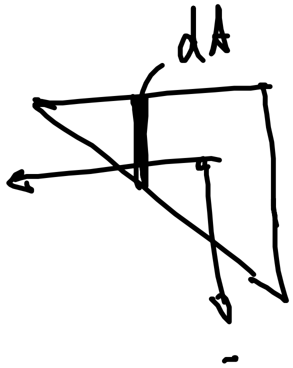
$$= \int_0^{3a} \hat{z}^2 \left(-\hat{z} + 3a\right) d\hat{z}$$

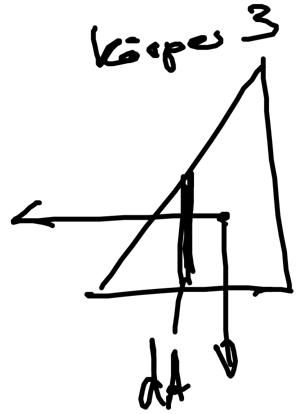
$$= \int_0^{3a} \left(-\hat{z}^3 + 3a\hat{z}^2\right) d\hat{z}$$

$$I_{\hat{y}} = \left[-\frac{1}{4}\hat{z}^4 + a\hat{z}^3\right]_0^{3a} = -\frac{81}{4}a^4 + 27a^4$$

$$I_{\hat{y}} = \frac{108 - 81}{4}a^4 = \underline{\underline{\frac{27}{4}a^4}}$$

$$I_y = \frac{27}{4}a^4 - a^2 \, \frac{9}{2}a^2 = \underline{\underline{\frac{9}{4}a^4}}$$





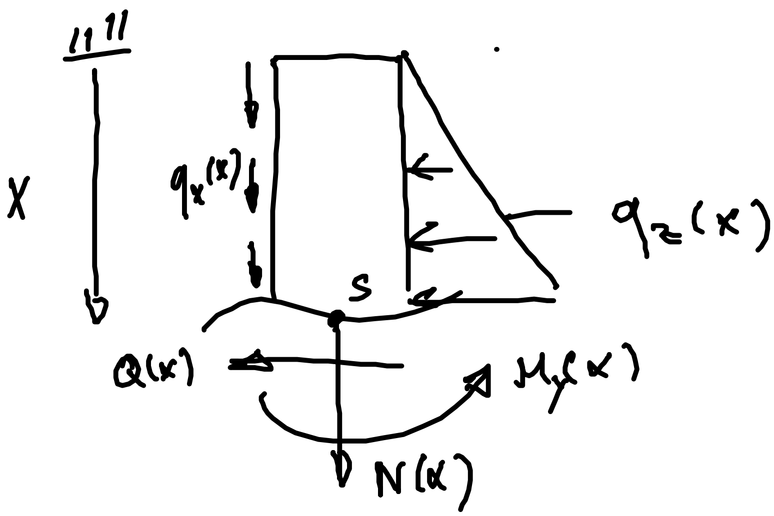
$$\boxed{I_{y2} = I_{y3}}$$

$$I_{y2} = \int z_2^2 \, dA$$

---

c) $F_n(x) := N(x)$, $F_q(x) := Q(x)$, $M_b(x) := M_y(x)$

<u>Globalschnittverfahren</u>:



$$\Sigma F_z = 0 = Q(x) + F_{qres}$$

$$\boxed{Q(x) = -F_{qres}}$$

$$q_z(x) = \frac{q_0}{l} x$$

$$\boxed{Q(x) = -\frac{q_0}{2l} x^2}$$

$$\Sigma M^{(s)} = 0 = M_y(x) + \frac{1}{6} \frac{q_0 x^3}{l}$$

$$\boxed{M_y(x) = -\frac{1}{6} \frac{q_0 x^3}{l}}$$

$$\sum F_x = 0 = N(x) + x \cdot q_x(x)$$

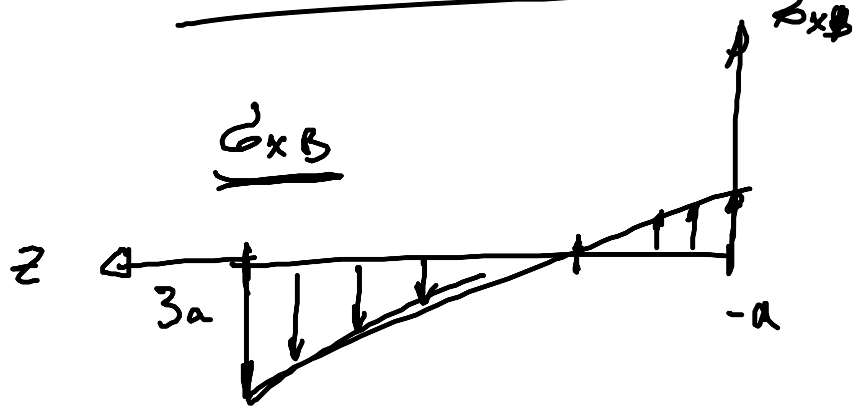
$$\boxed{N(x) = -\frac{27}{40} q_0 x}$$

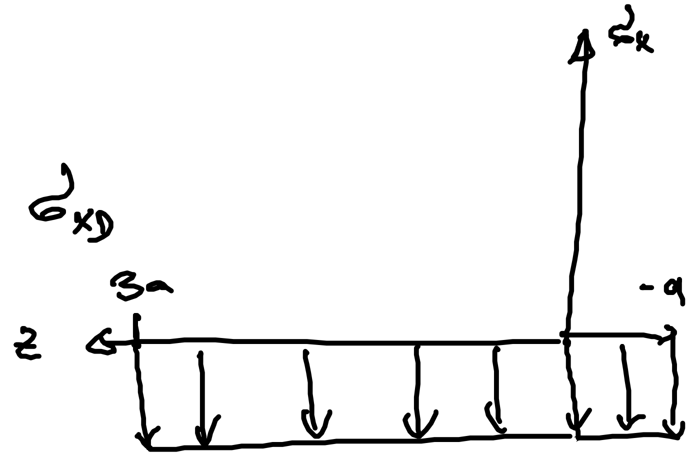
d) Bestimmen von σ_x

$$\sigma_{xB} = \frac{M_y(x)}{I_y} z \qquad \sigma_{xD} = \frac{N}{A}$$

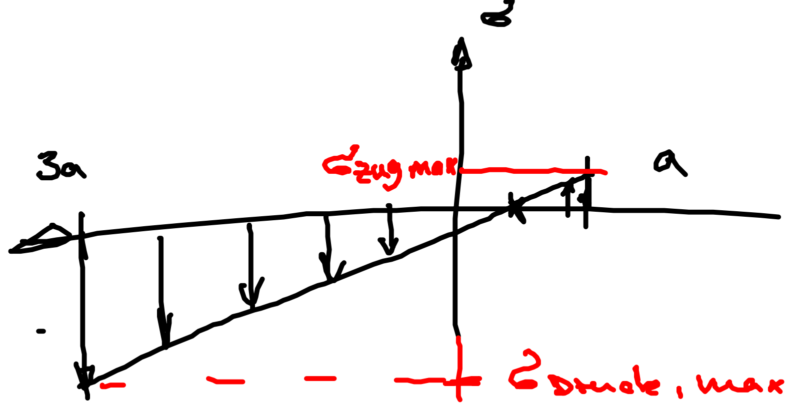
$$\sigma_x = \sigma_{xB} + \sigma_{xD}$$

$\sigma_x(x = l, z)$





Überlagerung



$$\sigma_{Druck,max}(x=l, z=3a) = \frac{M_y(l)}{I_y} 3a + \frac{N(l)}{A}$$

$$\ldots \quad = -\frac{505}{2} \frac{q_0}{a}$$

$$\sigma_{zug,max}(x=l, z=-a) = -\frac{M_y(l)}{I_y} a + \frac{N(l)}{A}$$

$$\ldots \quad = \frac{485}{6} \frac{q_0}{a}$$