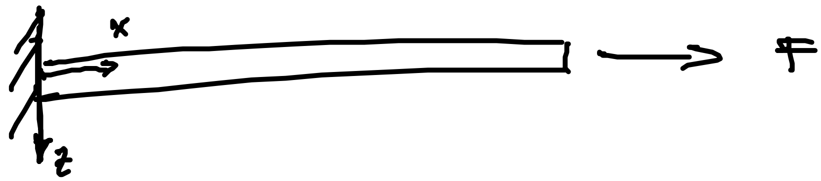
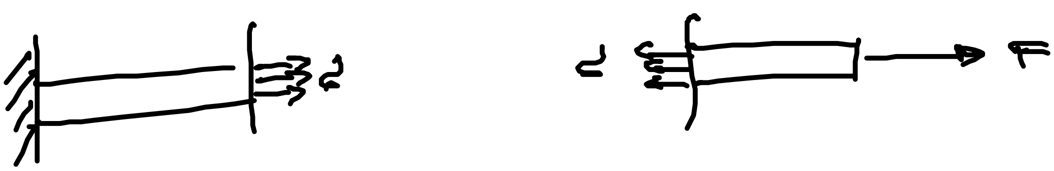
TUT : 129 a-c , 131 modifiziert

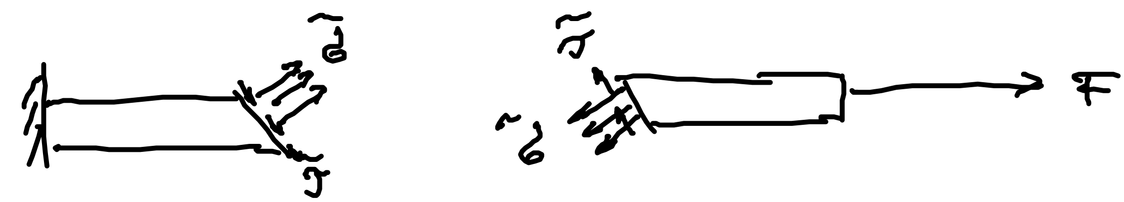
HA : 128 , 129 d , 130

Spannungen

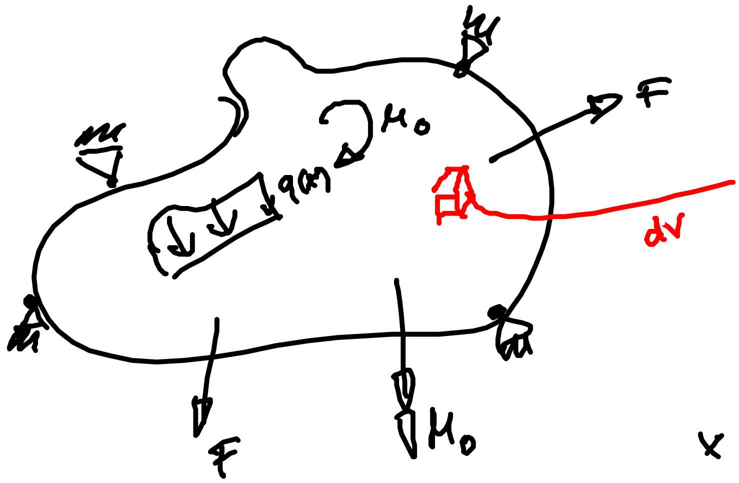
Bisher :

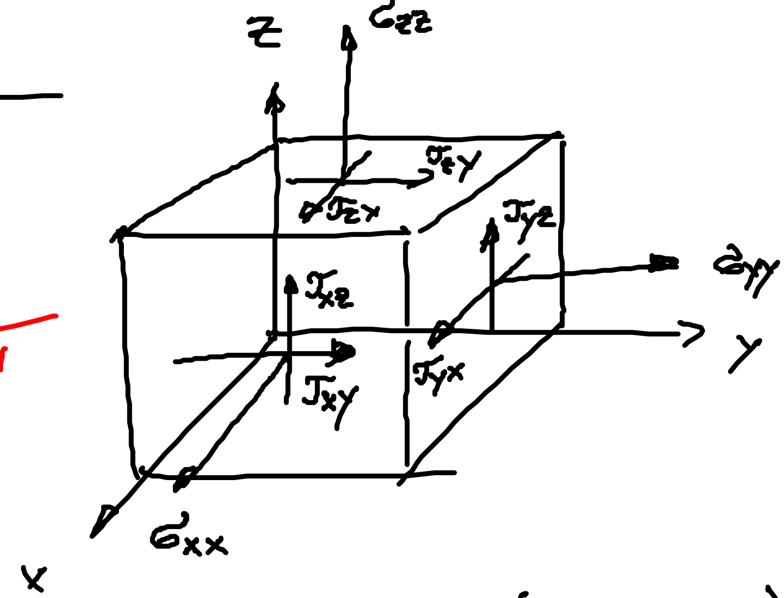






Allgemeine Definition





$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \qquad (i,j = x,y,z \quad i \neq j)$$

$(\hat{\sigma})$

Popov

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}_{x,y,z}$$

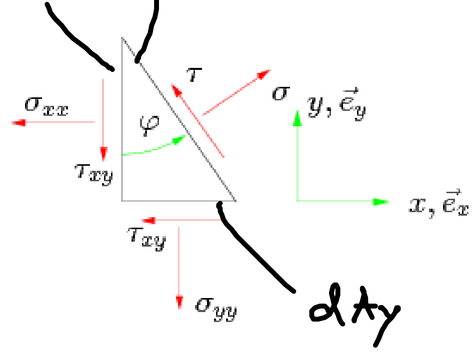
Ebener Spannungszustand:

$$\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{zy} = 0$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_{Eb} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}_{x,y}$$

dtx dt

132. Der dargestellte Scheibenausschnitt steht unter der Wirkung der eingezeichneten Spannungen. Leite in diesem allgemeinen Fall die Gleichungen für den MOHRschen Spannungskreis her!



(a) Fordere das Kräftegleichgewicht in x- und y-Richtung und bestimme daraus möglichst einfache Gleichungen für σ und τ! Benutze Additionstheoreme!

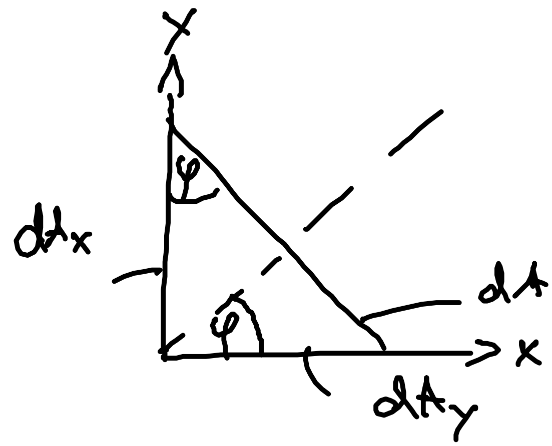
(b) Erzeuge durch Quadrieren und Addieren der Gleichungen eine Kreisgleichung!

(c) Identifiziere den Mittelpunkt, den Radius, die maximale Schubspannung und die Hauptnormalspannungen!

a) $dF = \sigma\, dA$

$dA_y = dA \sin\varphi$

$dA_x = dA \cos\varphi$



$\sum F_x = 0 = -\sigma_{xx}\, dA_x - \tau_{xy}\, dA_y -$
$- \tau \sin\varphi\, dA + \sigma \cos\varphi\, dA \quad |:dA$

(1) $\sigma_{xx}\cos\varphi + \tau_{xy}\sin\varphi = \boxed{-\tau\sin\varphi} + \boxed{\sigma\cos\varphi}$

$\sum F_y = 0 = -\sigma_{yy}\cdot dA_y - \tau_{xy}\, dA_x$
$+ \tau\cos\varphi\, dA + \sigma\sin\varphi\, dA \quad |:dA$

(2) $\sigma_{yy}\sin\varphi + \tau_{xy}\cos\varphi = \boxed{\tau\cos\varphi} + \boxed{\sigma\sin\varphi}$

σ, τ

$(1)\cdot\cos\varphi + (2)\sin\varphi$:

$\sigma_{xx}\cos^2\varphi + 2\tau_{xy}\sin\varphi\cos\varphi + \sigma_{yy}\sin^2\varphi = \sigma$

$\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)$ $\qquad \sin^2\varphi - \cos^2\varphi = -\cos 2\varphi$

$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)$

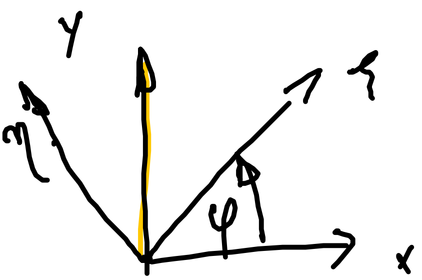
$$2\sin\varphi\cos\varphi = \underline{\sin 2\varphi}$$

(3) $$\boxed{\sigma = \underline{\tfrac{1}{2}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})} + \tfrac{1}{2}(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})\cos 2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi}$$

(1) $\sin\varphi$ − (2) $\cdot\cos\varphi$

$$\sigma_{xx}\cos\varphi\sin\varphi + \tau_{xy}(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) - \sigma_{yy}\cos\varphi\sin\varphi = -\tau$$

(4) $$\boxed{\tau = -\tfrac{1}{2}(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi}$$



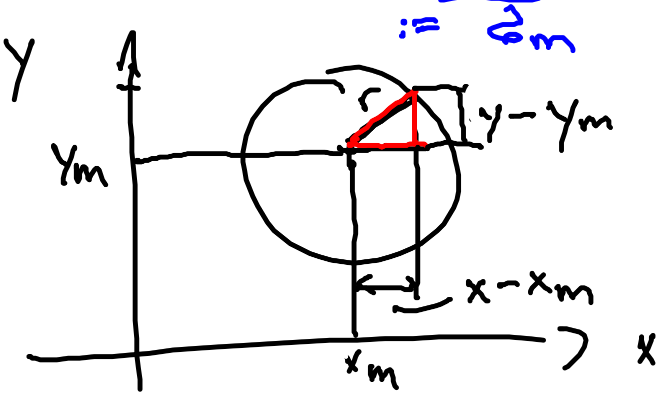
$$\sigma = \sigma_{\xi\xi}$$

$$\tau = \tau_{\xi\eta}$$

$$\boxed{\sigma_{\eta\eta} = \tfrac{1}{2}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}) - \tfrac{1}{2}(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})\cos 2\varphi - \tau_{xy}\sin 2\varphi}$$

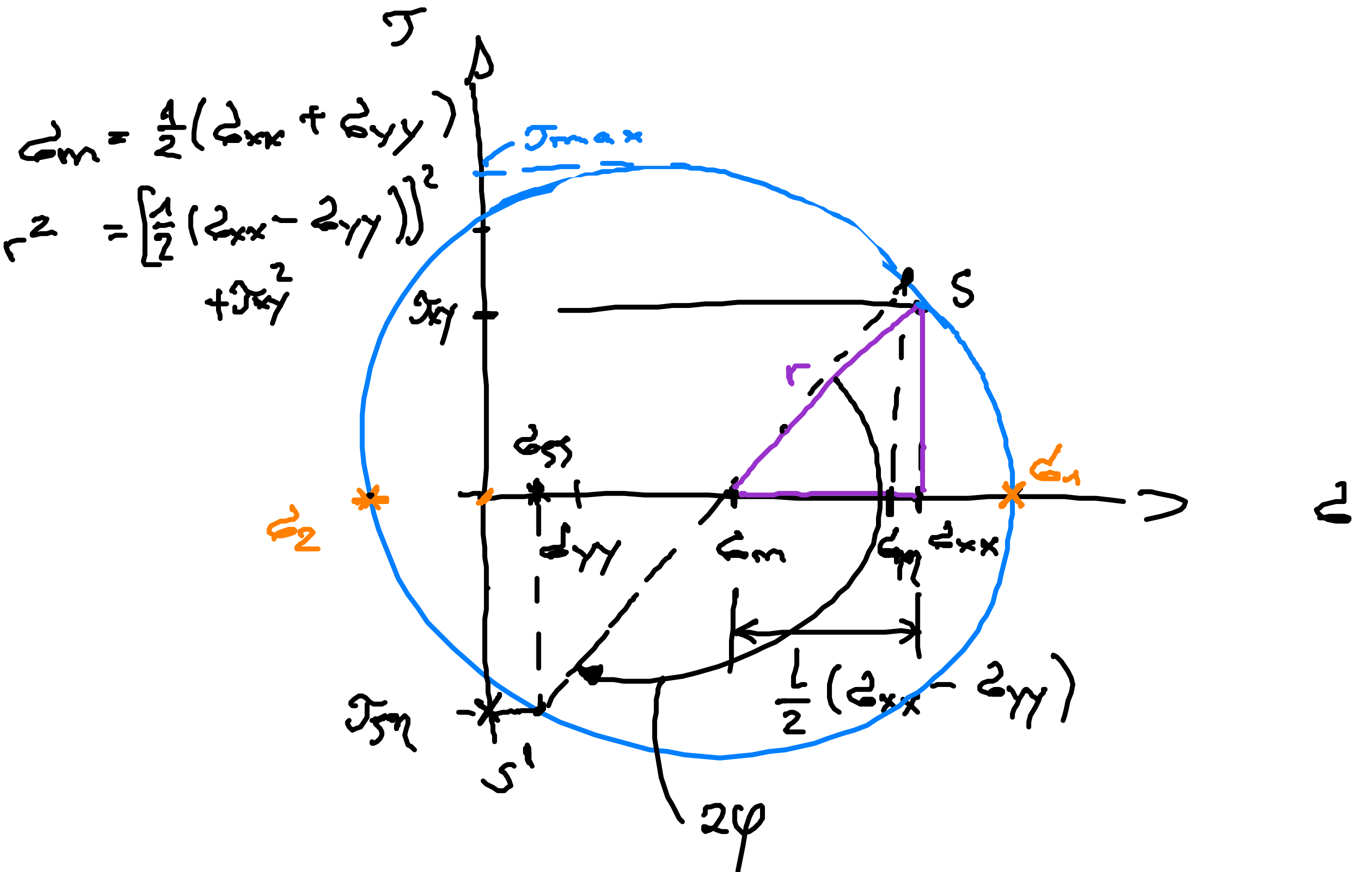
b) $$\Big[\sigma - \underbrace{\tfrac{1}{2}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})}_{:=\ \sigma_m}\Big]^2 + \tau^2 = \underbrace{\Big[\tfrac{1}{2}(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})\Big]^2 + \tau_{xy}^2}_{:=\ r^2}$$

$(3)^2 + (4)^2$



$$r^2 = (x - x_m)^2 + (y - y_m)^2$$

obige Gleichung definiert einen Kreis in der (σ, τ) Ebene mit dem Radius r und dem Mittelpunkt $(\sigma_m, 0)$



c) <u>Hauptspannungen:</u> $\tau_{\xi\eta} = 0 \qquad \sigma_1 > \sigma_2$

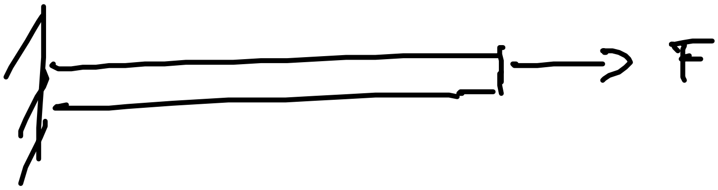
$$\sigma_{1,2} = \sigma_m \pm r$$
$$= \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

<u>maximale Schubspannung:</u>

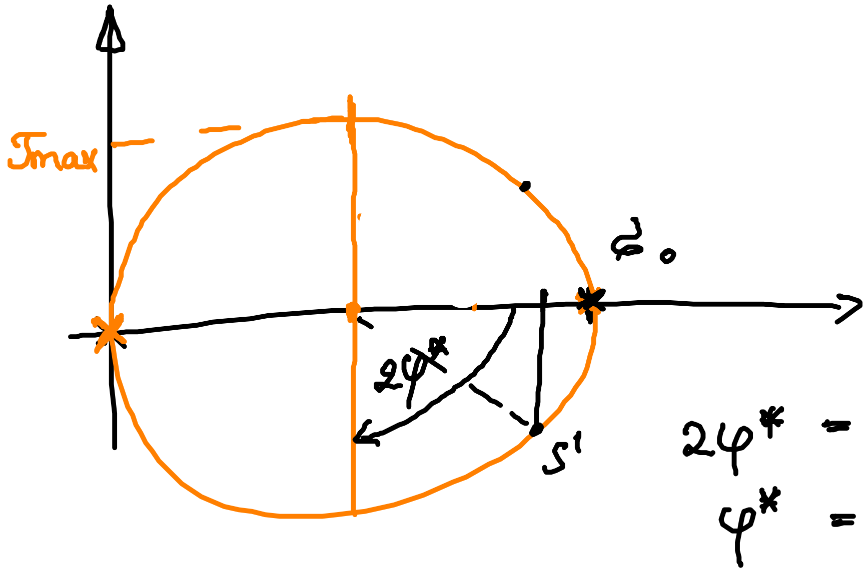
$$\tau_{max} = r = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Bsp

(1)



$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{x,y}$$

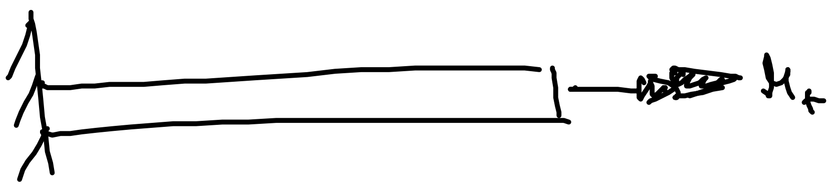


σ_{xx}, τ_{xy}

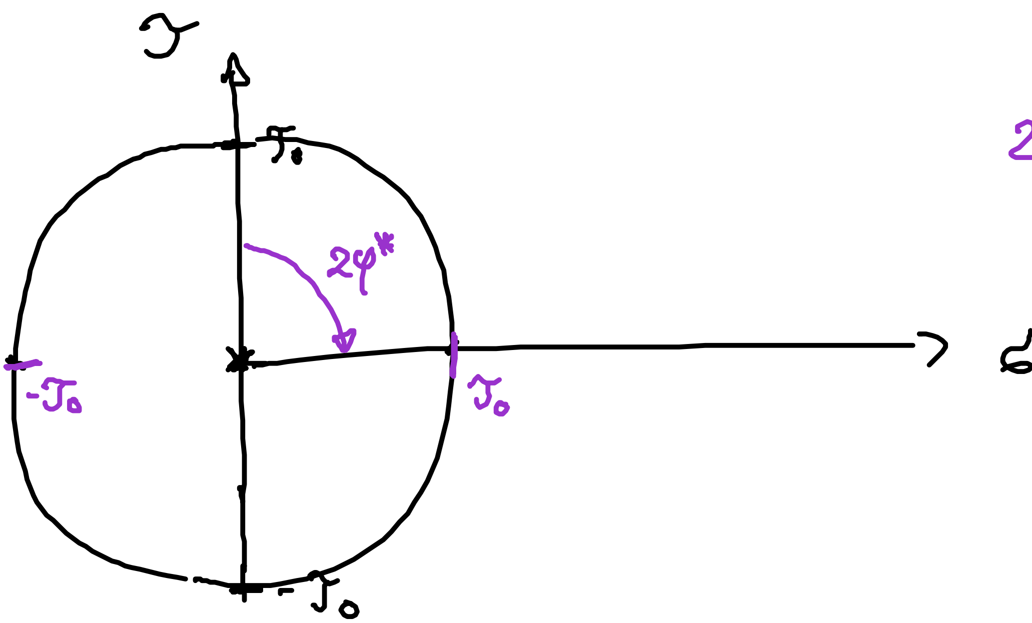
$\sigma_{yy}, -\tau_{xy}$

$$2\varphi^* = 90°$$
$$\varphi^* = 45°$$

(2)



$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & \tau_0 \\ \tau_0 & 0 \end{pmatrix}_{x,y}$$



$$2\varphi^* = 90°$$
$$\varphi^* = 45°$$

(3)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}$$

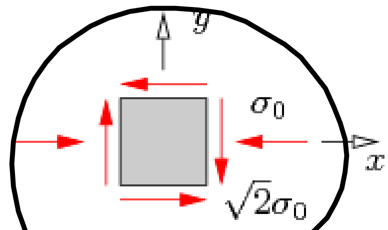
Zusatzaufgabe

0. Gegeben sei der Ebene Spannungzustand wie abgebildet. Bestimmen Sie:

   (a) Die Hauptspannungen und den zugehörigen Schnittwinkel.

   (b) Die maximalen Schubspannungen $\pm\tau_{max}$.

   (c) Zeichnen Sie den Mohrschen Spannungskreis und überprüfen Sie die rechnerisch ermittelten Ergebnisse.



a) Hauptspannungen

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\underline{\sigma_{xx}} + \underline{\sigma_{yy}}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)\right)^2 + \underline{\tau_{xy}^2}}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_{xx} = \begin{pmatrix} -\sigma_0 & -\sqrt{2}\,\sigma_0 \\ -\sqrt{2}\,\sigma_0 & 0 \end{pmatrix}_{x,y}$$

$$\sigma_{1,2} = -\frac{1}{2}\sigma_0 \pm \sqrt{\frac{1}{4}\sigma_0^2 + 2\sigma_0^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\sigma_0 \pm \frac{3}{2}\sigma_0$$

$$\sigma_1 = \sigma_0$$

$$\sigma_2 = -2\sigma_0$$

$$\boxed{\tan 2\varphi^* = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}}$$

$$\tan 2\varphi^* = \frac{-2\sqrt{2}\,\cancel{\sigma_0}}{-\cancel{\sigma_0}} = +2\sqrt{2}$$

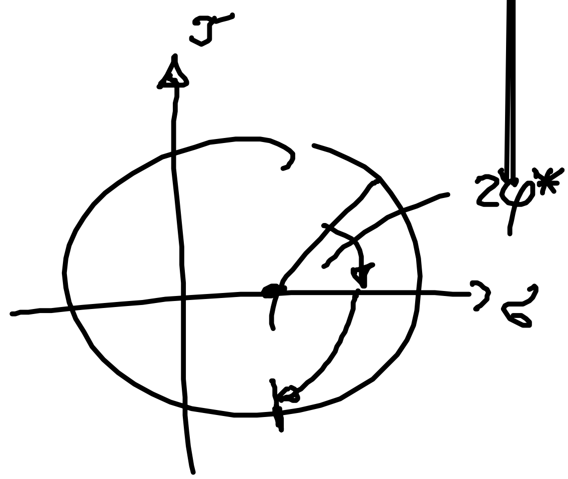
$$2\varphi^* \approx 70{,}52^\circ$$

$$\boxed{\varphi^* = 35{,}25^\circ}$$

b)

$$\tau_{max} = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{xx}-\sigma_{yy}\right)\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\boxed{\tau_{max} = \pm\frac{3}{2}\sigma_0}$$

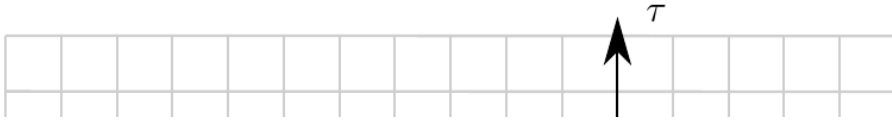


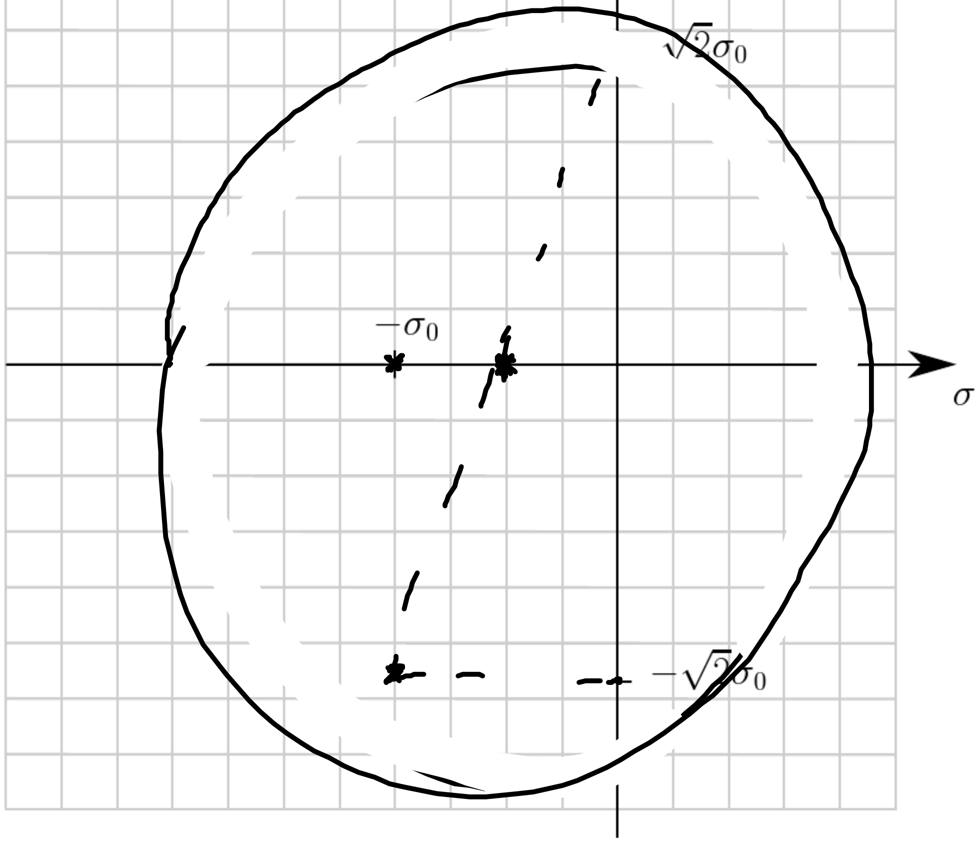
$$\varphi^{**} = \varphi^* + \frac{\pi}{4}$$

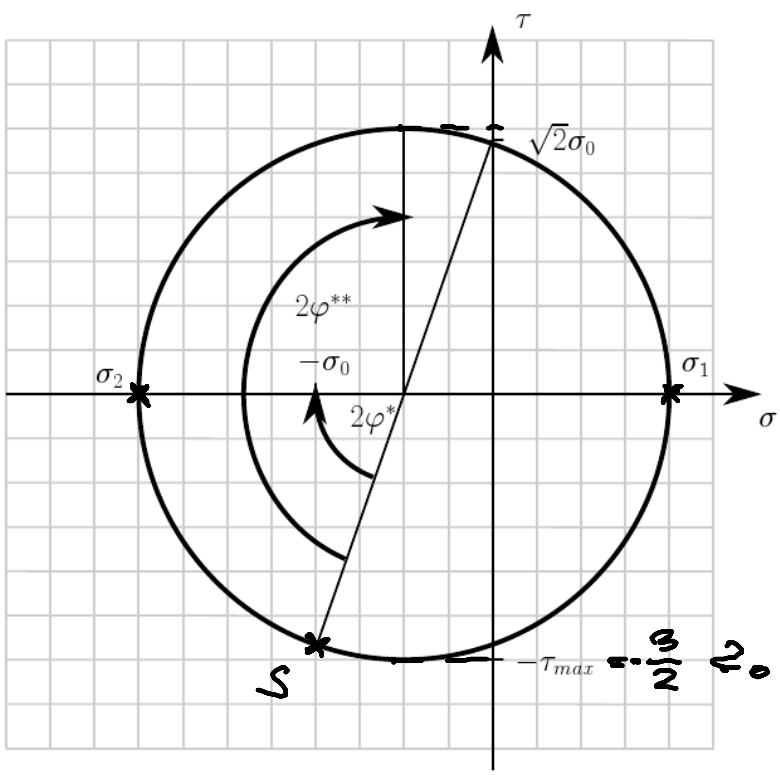
$$\varphi^{**} \approx 80^\circ$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} -\sigma_0 & -\sqrt{2}\sigma_0 \\ -\sqrt{2}\sigma_0 & 0 \end{pmatrix}$$

c)







Kochrezept zum Zeichnen

① Punkt (σ_{xx}, τ_{xy}) P_1

(2) Punkt (σ_{yy} , $-\tau_{xy}$) P_2

(3) Linie zwischen den Punkten ziehen

(Schnittpunkt zur σ-Achse ist der Kreismittelpunkt)

(4) Um diesen Kreis schlagen mit Radius $\overline{MP_1}$