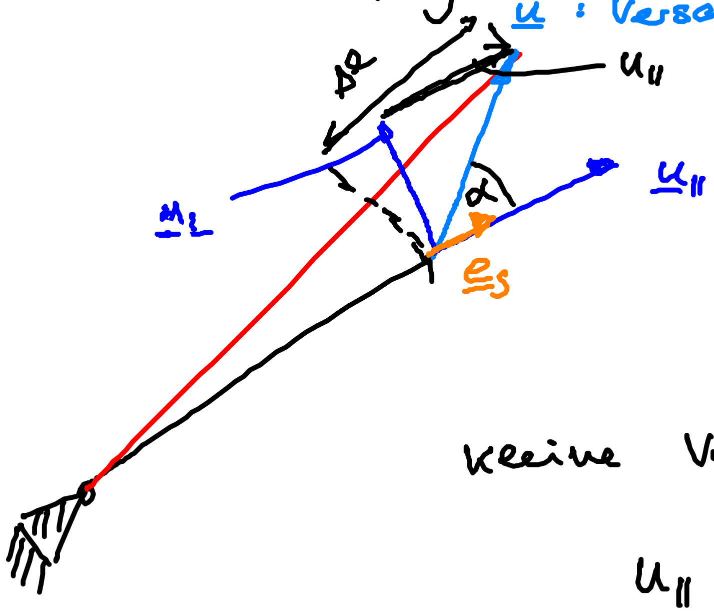
Wiederholung: linearisierte Kinematik

Projektionsmethode

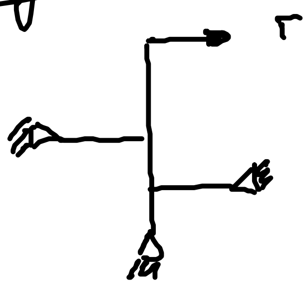


$$\underline{u} \cdot \underline{e}_s = |\underline{e}_s|\,|\underline{u}|\cos\alpha$$
$$= u_{\parallel}$$

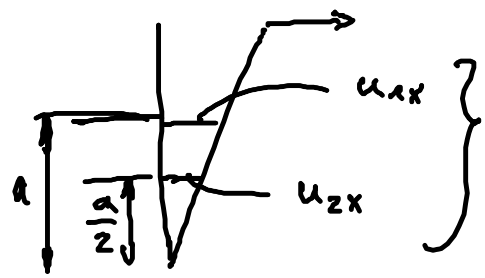
keine Verformungen

$$u_{\parallel} \approx \Delta l \approx \underline{u} \cdot \underline{e}_s$$

Aufgabe 74

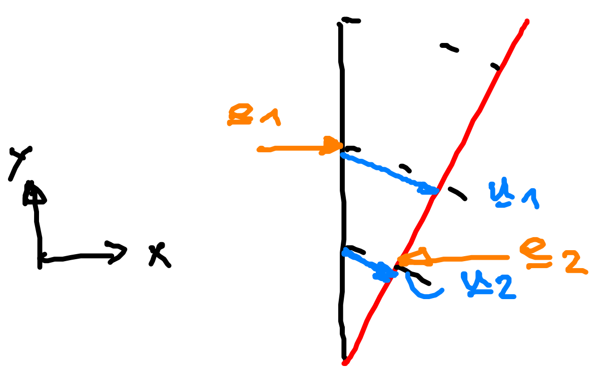


Verformungskinematik



Strahlensatz

$$\frac{u_{1x}}{\cancel{a}} = \frac{2u_{2x}}{\cancel{a}}$$



$$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta l_1 = \underline{e}_1 \cdot \underline{u}_1 = u_{1x}$$
$$\Delta l_2 = \underline{e}_2 \cdot \underline{u}_2 = -u_{2x}$$

$$\boxed{\Delta l_1 = -2\Delta l_2}$$

Widerholung: Thermische Dehnung

$$\varepsilon_m = \frac{\sigma}{E}$$ (Hooke'sches Gesetz)

$$\varepsilon_t = \alpha \Delta T$$ lineare thermische Dehnung

$$[1] = [\alpha \cdot {}^\circ C]$$

$$[\alpha] = \left[\frac{1}{{}^\circ C}\right]$$

α: Wärmeausdehnungskoeffizient $\left[\frac{1}{{}^\circ C}\right]$

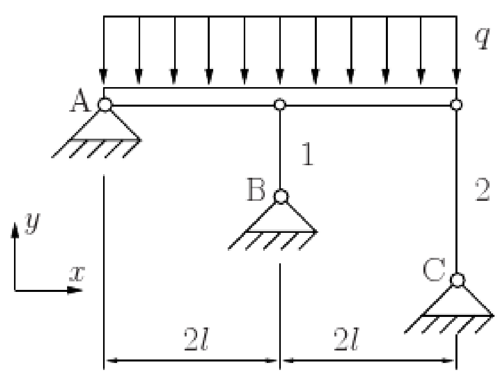
ΔT: Temperaturschw.

$$\varepsilon = \varepsilon_m + \varepsilon_t = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T$$

$$\sigma = \frac{N}{A}$$ (Erinnerung)

Aufgabe 84

1. Ein starrer Balken der Länge $4l$ ist durch ein festes Gelenklager in A und zwei Stäbe in B und C gestützt. Der Balken und die Stäbe sind als gewichtslos zu betrachten. Im unbelasteten Zustand seien die Stäbe ungedehnt. Die Stäbe haben die Querschnittsflächen $A_1 = A_2 = A$ und die Längen $l_1 = l$, $l_2 = 2l$, E-Modul E.

   Der Balken wird durch eine konstante Streckenlast q belastet. Der Stab 1 wird zudem um ΔT erwärmt. Der lineare Wärmeausdehnungskoeffizient für den Werkstoff des Stabes 1 ist α.

   (a) Berechnen Sie für diesen Fall die Stabkräfte S_1 und S_2 sowie die Lagerkraft in A.

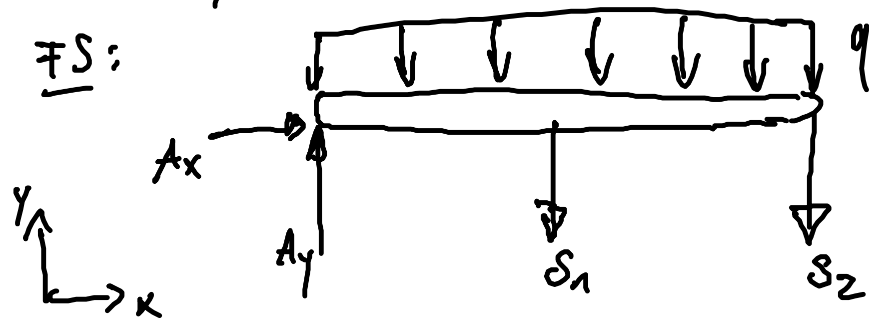
   (b) Für welche Temperaturänderung ΔT^* wird die gesamte Belastung von Stab 1 getragen?

   Geg.: q, ΔT, α, A, l, E

a) Das System ist statisch unbestimmt, d.h. alleine aus den GGW bed lassen sich die Lagerkräfte nicht bestimmen

i) Aufstellen der GGW bed

FS:



GGW:

$$\sum F_x = \boxed{0 = A_x}$$

$$(2) \quad \sum F_y = A_y - S_1 - S_2 - q4l = 0$$

$$\sum M^{(A)} = 0 = -S_1\, 2l - S_2 \cdot 4l - q4l \cdot 2l$$

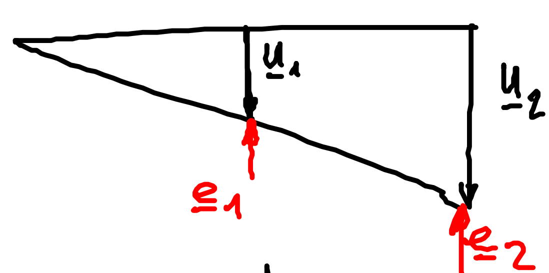
$$S_1 = -S_2\, 2 - 4ql \quad (1)$$

ii) Materialstrukturgesetz:

$$(3) \quad \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} + \alpha \Delta T = \frac{S_1}{EA} + \alpha \Delta T = \frac{\Delta l_1}{l}$$

$$(4) \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} = \frac{S_2}{EA} = \frac{\Delta l_2}{2l}$$

iii) Verformungskinematik



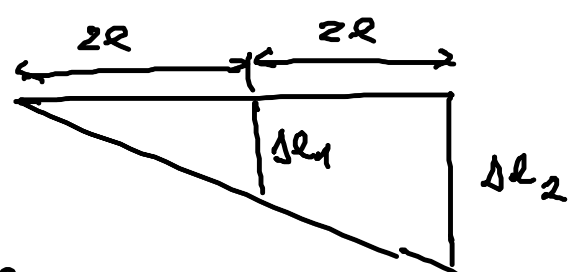
$$\underline{e}_1 = \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta l_1 = u_{1y} = \underline{e}_1 \cdot \underline{u}_1$$

$$\Delta l_2 = u_{2y} = \underline{e}_2 \cdot \underline{u}_2$$

Strahlensatz:

$$\frac{\Delta l_1}{2l} = \frac{\Delta l_2}{4l}$$



$$\boxed{2\Delta l_1 = \Delta l_2} \quad (5)$$

Jetzt 5 Glgn, 5 unbekannte :)

iv) Gleichungssystem lösen

(3), (4) in (5)

$$\frac{\cancel{2l}\, S_1}{EA} + \cancel{2l}\,\alpha \Delta T = \frac{S_2\, \cancel{2l}}{EA}$$

$\cdot EA$

$$\frac{S_1}{EA} + \alpha \Delta T = \frac{S_2}{EA}$$

Glg (1) $\quad S_1 = -2S_2 - 4ql$

$$-2S_2 - 4ql + EA\alpha\Delta T = S_2$$

$$\boxed{S_2 = \frac{1}{3}\left(EA\alpha\Delta T - 4ql\right)}$$

$$S_1 = -\frac{2}{3}\left(EA\alpha\Delta T - 4ql\right) - 4ql$$

$$\boxed{S_1 = -\frac{4}{3}ql - \frac{2}{3}EA\alpha\Delta T}$$

Einsetzen in (2):

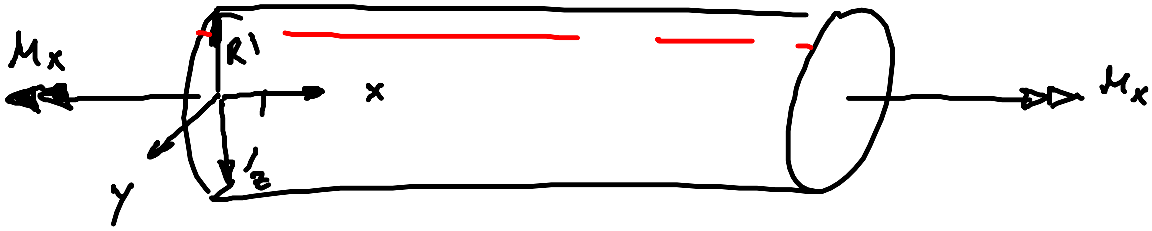
$$A_y = -S_2$$

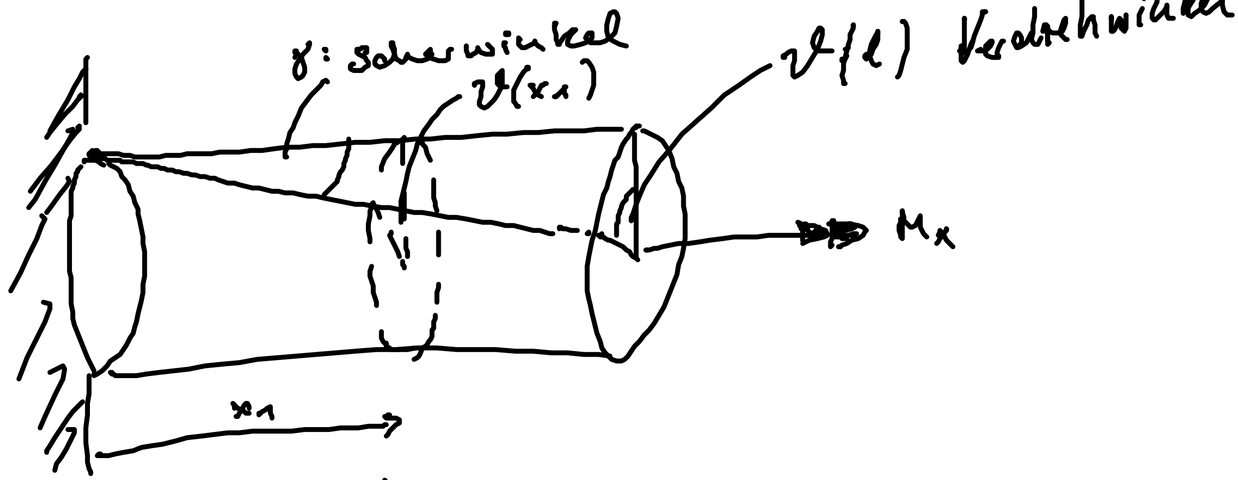
b) Bedingung $\quad S_2 \overset{!}{=} 0$

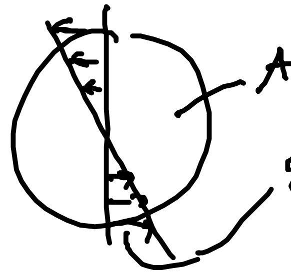
$$\curvearrowright \quad EA\alpha\Delta T^* = 4ql$$

$$\boxed{\Delta T^* = \frac{4ql}{EA\alpha}}$$

Wiederholung: TORSION







τ: Schubspannungen hervorgerufen durch das Moment

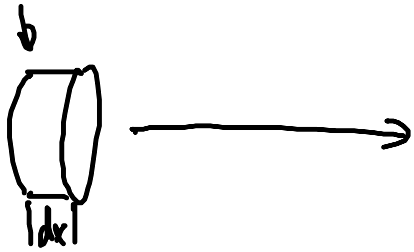
Materialgesetz: $\tau \sim \gamma$

$$\tau = G\gamma$$

Schubmodul $\quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

$G < E$

wie in VL



$$\gamma = r\vartheta'$$

$$\tau = G r \vartheta'$$

$$M_T = \int \underbrace{\tau}_{\text{Kraft}} \cdot \underbrace{r}_{\text{Hebelarm}} \, dA$$

$$M_T = \int G r^2 \vartheta' \, dA$$

$$M_T = G I_p \vartheta'$$

polares Flächenträgheits-moment $I_p = \int r^2 \, dA$

<u>GI_p</u>: Torsionssteifigkeit

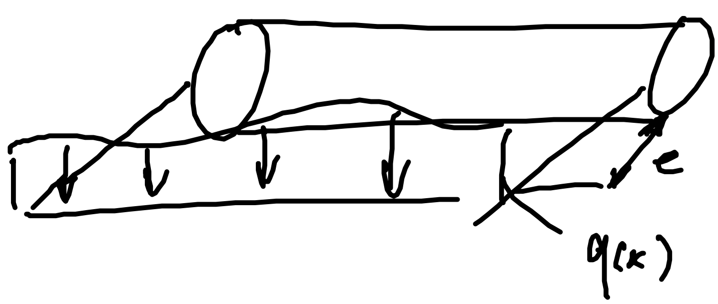
<u>vgl</u>: Dehnsteifigkeit EA

$$N = EA u'$$

<u>Schnittlasten dgl TORSION</u>

$$M_t'(x) = -m_t(x)$$

↳ Momentenschüttung



$$m_t = q(x) e$$

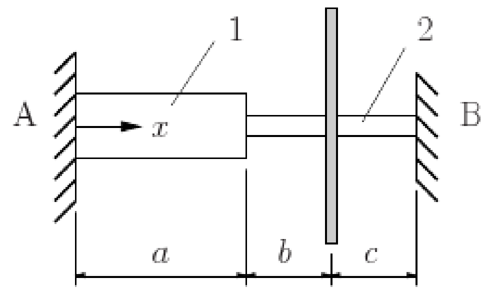
Aufgabe 89 (modifiziert)

2. Die Enden einer abgesetzten Welle (Abschnitt 1: Durchmesser d_1, Abschnitt 2: Durchmesser d_2) sind in den Lagern A und B gegen Verdrehung festgehalten. Auf ein Zahnrad, das mit der Welle fest verbunden ist, wirkt ein Kräftepaar, so daß auf die Welle das Torsionsmoment M_T übertragen wird.

(a) Wie groß sind die in den Lagern A und B aufzunehmenden Torsionsmomente?

(b) In welchem Wellenabschnitt tritt für den Fall $a > b > c$ die größte Schubspannung τ_{max} auf und wie groß ist sie?

(c) An welcher Stelle müßte das Zahnrad auf dem Wellenabsatz 2 befestigt sein, damit der Verdrehwinkel maximal wird?

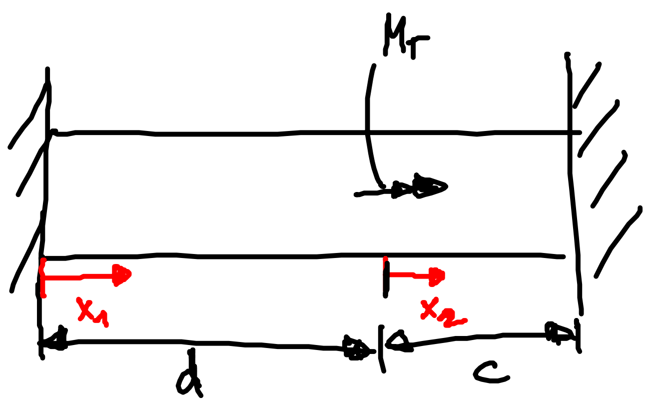


Geg.: d_1, d_2, a, b, c, M_T

$d_1 = d_2 = d$

$a + b = d$

a)



$$M_t' = -m_t(x) = 0$$

i) Bereichseinteilung

① : $0 \leq x_1 \leq d$

② : $0 \leq x_2 \leq c$

} lokale Variablen

ii) <u>Integration</u>

$$\frac{dM_t}{dx} = 0$$

$$\int dM_t = \int 0 \cdot dx$$

$$M_t = C$$

$$M_T = GI_p \vartheta_1'(x_1)$$

Bereich 1:

$$M_{t1} = C_1 = GI_p \frac{d\vartheta_1}{dx_1}$$

$$GI_p \vartheta_1 = C_1 x_1 + C_2$$

Bereich 2: Analog

$$M_{t2} = C_3$$

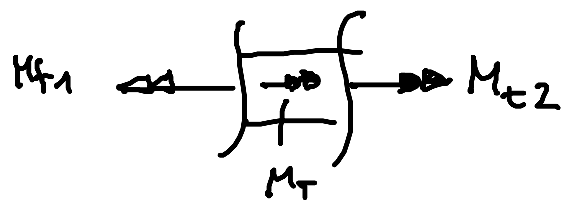
$$GI_p \vartheta_2 = C_3 x_2 + C_4$$

iii) **Rand und Übergangsbedingungen**

$$\vartheta_1(x_1 = 0) = 0 \quad (1) \qquad \vartheta_2(x_2 = c) = 0 \quad (4)$$

$$\vartheta_1(x_1 = d) = \vartheta_2(x_2 = 0) \quad (2)$$

x = d



GGW:

$$M_{t1} = M_{t2} + M_T \quad (3)$$

iv) Konstantenbestimmen

(1) $\quad C_1 \cdot 0 + \boxed{C_2 = 0}$

(2) $\quad C_1 d = C_3 \cdot 0 + C_4$

(3) $\quad \cancel{GI_p}\vartheta_1'(x_1 = d) = \cancel{GI_p}\vartheta_2'(x_2 = 0) + M_T$

$$C_1 = C_3 + \frac{M_T}{GI_p}$$

$$(4) \qquad C_3 \cdot c + C_4 = 0$$

mit Vorsicht

$$\ldots \quad C_3 = -M_T \frac{d}{c+d} = M_{t2}$$

$$C_4 = M_T \frac{cd}{c+d}$$

$$C_1 = M_T \frac{c}{c+d} = M_{t1}$$

aus Integration