UE: 101

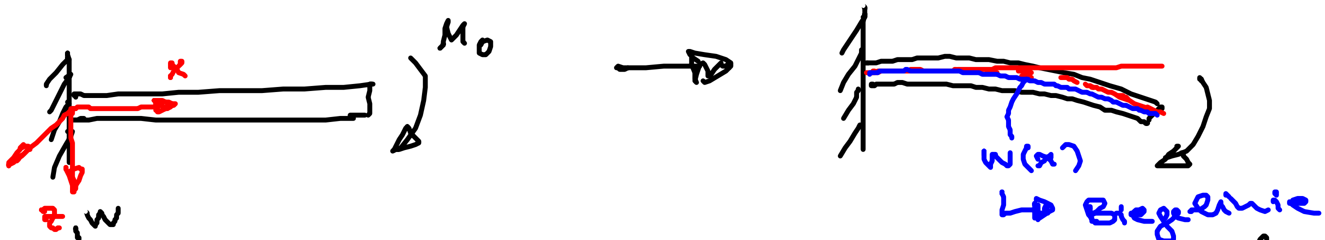
TUT: 97, 100

HA: 96, 99

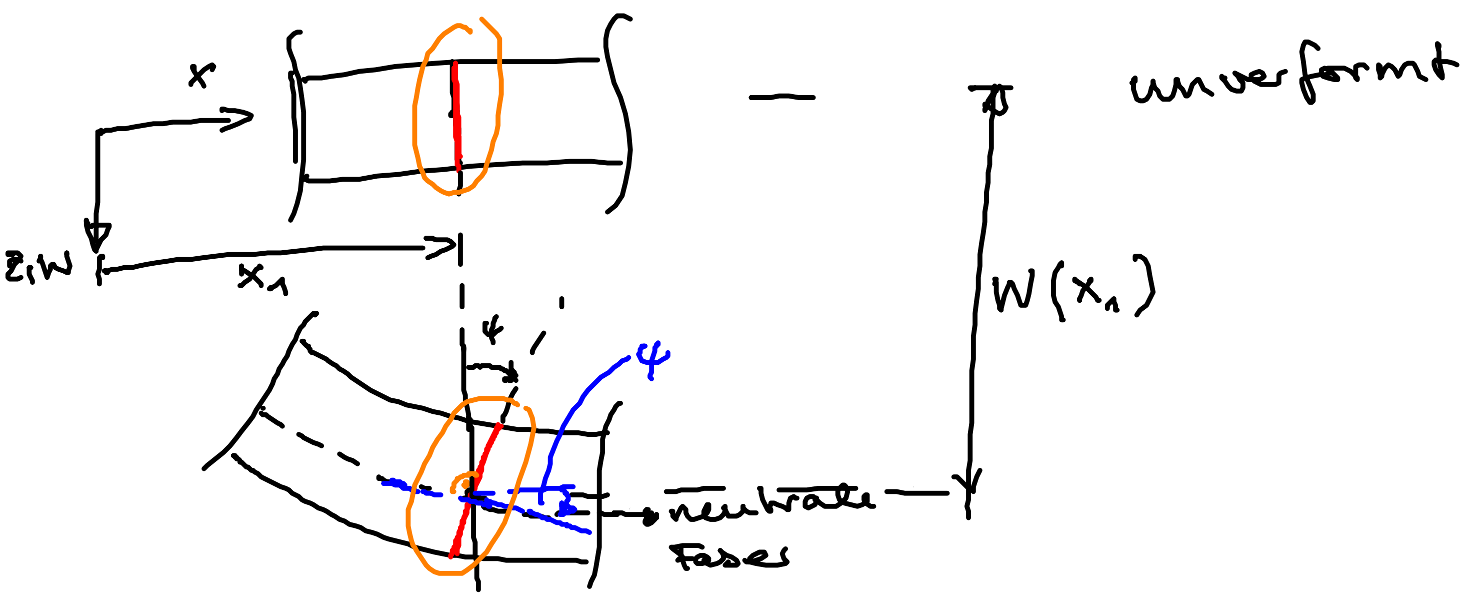
Klausureinsicht:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Mo | 16 - 18 Uhr | H 107 |
| Di | 14 - 16 Uhr | H 106 |

## WIEDERHOLUNG Balkenbiegung




Ges: $M_y(x)$ als Funktion der Verformung $w(x)$




φ: Biegewinkel

$-\varphi = w'(x)$

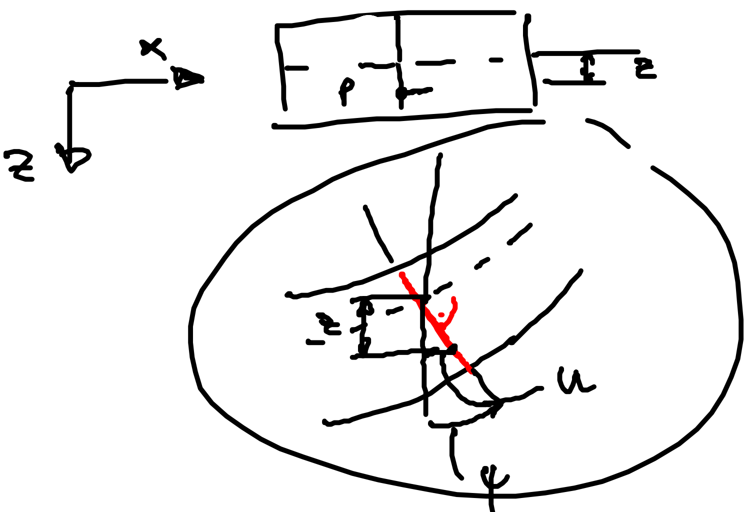
Annahmen:

- Schlanke Balken

- **Bernoulli Hypothese:**

Querschnitte die vor der Verformung eben waren sind dies auch nach der Verformung. Weiterhin stehen sie senkrecht auf der neutralen Faser
(schubstarren Balken)

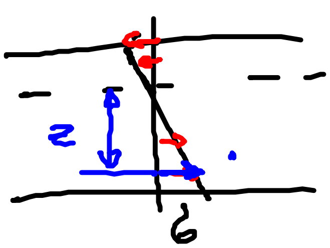
$M_y(x)$ als Funktion von $w$




$$u = \psi \cdot z$$

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{d(\psi \cdot z)}{dx}$$

$$\varepsilon = z\psi'$$




$$M_y(x) = \int \sigma \cdot z \, dA$$

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$M_y(x) = \int E\varepsilon \cdot z \, dA$$

$$M_y(x) = E \int \psi' z^2 \, dA$$

$$M_y(x) = -E\, w'' \int z^2 dA$$

$$\psi = -w'$$

$$\psi' = -w''$$

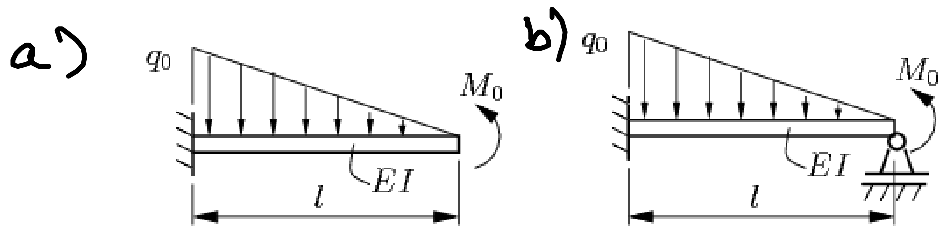
$$\boxed{M_y(x) = -\underbrace{E I_y}_{\text{Biegesteifigkeit}} w''(x)}$$

$I_y$: Flächenträgheitsmoment

$$I_y = \int z^2 dA$$

AUFGABE 101

1. Berechnen Sie den Querverschiebungszustand der skizzierten Systeme durch Integration der Verschiebungsdifferentialgleichungen.




Geg.: $l$, $q_0$, $M_0 = \frac{q_0}{2} l^2$, $EI$

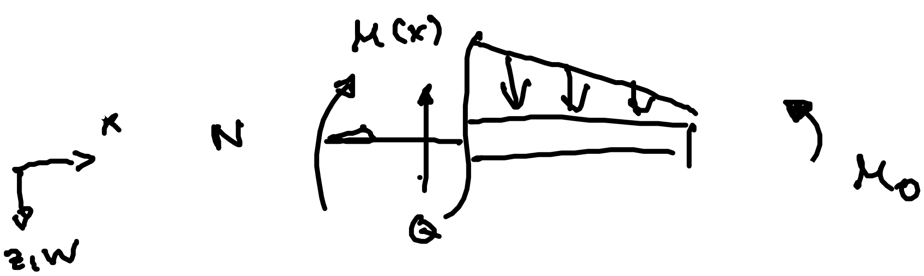
a) i) Statische Bestimmtheit

System ist statisch bestimmt

$Q' = -q(x)$

$$\boxed{M(x) = -EI\, w''(x)} \quad (*)$$

ii) bestimmen von $M_b(y)$




GGW:

...

$$M(x) = -\frac{q_0}{6l}(l-x)^3 + \frac{q_0}{2} l^2$$

iii) DGL (*) lösen durch Integration

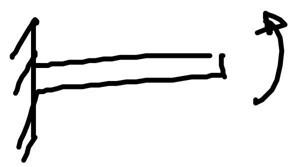
$$-EI\, w''(x) = -\frac{q_0}{6l}(l-x)^3 + \frac{q_0}{2} l^2$$

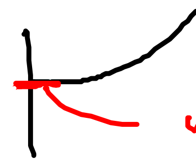
$$-EI\, w'(x) = \int \left[ -\frac{q_0}{6l}(l-x)^3 + \frac{q_0}{2} l^2 \right] dx + C_1$$

$$(1) \quad -EI\,w'(x) = +\frac{q_0}{4\cdot 6\ell}(\ell-x)^4 + \frac{q_0}{2}\ell^2 x + C_1$$

$$(2) \quad -EI\,w(x) = -\frac{q_0}{120\ell}(\ell-x)^5 + \frac{q_0}{4}\ell^2 x^2 + C_1 \underline{x} + C_2$$

iv) Randbedingungen für $w'$, $w$
(geometrische RB)





$w'(x=0) = 0$ (R1)

$w(x=0) = 0$ (R2)

v) Konstanten bestimmen

(R1) und (1) liefert

$$-EI\,w'(x=0) = \frac{q_0}{24\ell}\cdot \ell^4 + C_1 \overset{!}{=} 0$$

$$\boxed{C_1 = -\frac{q_0}{24}\ell^3}$$

(R2) und (2) liefert:

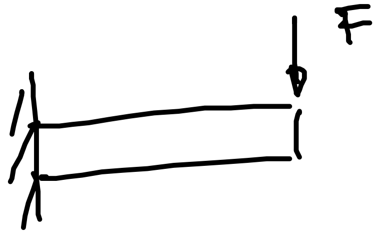
$$-EI\,w(x=0) = -\frac{q_0}{120}\ell^4 + C_2 \overset{!}{=} \underline{\underline{0}}$$

$$\boxed{C_2 = \frac{q_0}{120}\ell^4}$$

vi) Biegelinie zusammenfassen

mit (2)

$$\boxed{w(x) = -\frac{1}{EI}\left[-\frac{q_0}{120\ell}(\ell-x)^5 + \frac{q_0}{4}\ell^2x^2 - \frac{q_0\ell^3}{24}x + \frac{q_0}{120}\ell^4\right]}$$

① 

$Q(x) = F$

$w(x)$ Polynom wievielten Grades.

$M_y(x) = - EI w''$ $\quad M' = Q$

$M'(x) = (- EI w'')' = Q$

$w(x)$ ist ein Polynom 3ten Grades.

②

10.1 b)

i) statisch bestimmtes System?

System ist 1-fach statisch unbestimmt

$$\boxed{M_y(x) = -EI\, w''(x)}$$

2 fach Ableiten

$$M_y'(x) = Q(x) \qquad Q'(x) = -q(x)$$

Schnittl. DGL

$$M_y''(x) = -q(x)$$

$$M_y''(x) = \left[-EI\, w''(x)\right]'' = -q(x) \qquad EI = \text{konst}$$

~~Mit~~

$$\boxed{\begin{aligned} \left[EI\, w''(x)\right]'' &= q(x) \\ EI\, w^{IV}(x) &= q(x) \end{aligned}}$$

EI = konst

ii) Aufstellen der Streckenlast

$$q(x) = -\frac{q_0}{l}x + q_0 = q_0\left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

iii) DGL lösen durch Integration

$$EI\, w^{IV}(x) = q_0\left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

$$EI\, w'''(x) = q_0\left(x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{l}\right) + \tilde{C}_1$$

$$= q_0 l\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \underbrace{\frac{1}{q_0 l}\tilde{C}_1}\right)$$

$$\text{(i)}\quad EI\,w'''(x) = q_0 l\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \overset{:=\,C_1}{\underline{C_1}}\right)$$

$$\text{(ii)}\quad EI\,w''(x) = q_0 l^2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{x}{l}\right)^3 + C_1\left(\frac{x}{l}\right) + C_2\right)$$

$$\text{(iii)}\quad EI\,w'(x) = q_0 l^3\left(\frac{1}{6}\left(\frac{x}{l}\right)^3 - \frac{1}{24}\left(\frac{x}{l}\right)^4 + \frac{1}{2}C_1\left(\frac{x}{l}\right)^2 + C_2\left(\frac{x}{l}\right) + C_3\right)$$

$$\text{(iv)}\quad EI\,w(x) = q_0 l^4\left[\frac{1}{24}\left(\frac{x}{l}\right)^4 - \frac{1}{120}\left(\frac{x}{l}\right)^5 + \frac{1}{6}\left(\frac{x}{l}\right)^3 C_1 + \frac{C_2}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 + C_3\left(\frac{x}{l}\right) + C_4\right]$$

iii) Randbedingungen aufstellen

- RB für $w$, $w'$ heißen geometrische RBen
- RB für $-EI\,w'' = M(x)$ und $-EI\,w''' = Q(x)$ heißen dynamische RBen

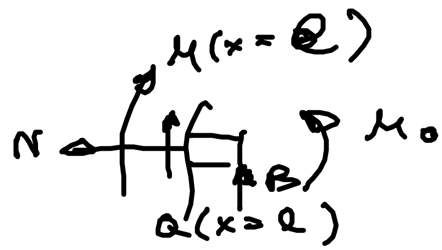
(1) $w(x=0) = 0$

(2) $w'(x=0) = 0$

(3) $w(x=l) = 0$

$M(x=l) = M_0$

(4) $M_0 = -EI\,w''(x=l)$




iv) Bestimmen der Konstanten

mit (1) und (iv) folgt

$$\boxed{C_4 = 0}$$

mit (2) und (iii)

$$\boxed{C_3 = 0}$$

mit (4) und (ii)

$$-M_0 = q_0 l^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + C_1 + C_2 \right)$$

mit (3) und (iv)

$$0 = EI\,w(l) = q_0 l^4 \left( \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{C_1}{6} + \frac{C_2}{2} \right)$$

$$\ldots \quad C_1 = -\frac{23}{20}$$

$$C_2 = -\frac{19}{60}$$

VORTEIL der dimensionslosen Integration:

1. Konstanten sind dimensionslos
2. Auswertung der RB oft leichter

v) Biegelinie

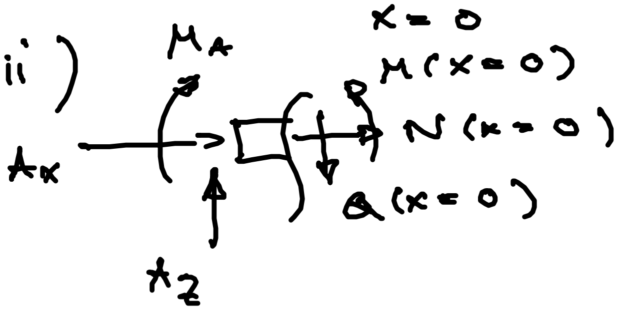
$$w(x) = \frac{1}{EI} q_0 l^4 \left( -\frac{1}{120}\left(\frac{x}{l}\right)^5 + \frac{1}{24}\left(\frac{x}{l}\right)^4 - \frac{23}{120}\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{19}{120}\left(\frac{x}{l}\right)^2 \right)$$

vi) Biegemoment und Querkraft

$$M(x) = -EI\,w''(x) = q_0 l^2 \left( -\frac{1}{6}\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{23}{20}\left(\frac{x}{l}\right) + \frac{19}{60} \right)$$

$$Q(x) = q_0 \ell \left( -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + \frac{x}{\ell} + \frac{23}{20} \right)$$

vii)




$$\boxed{\begin{aligned} M_A &= M(x=0) = q_0 \ell^2 \cdot \frac{19}{60} \\ A_z &= Q(x=0) = \frac{23}{20} q_0 \ell \end{aligned}}$$