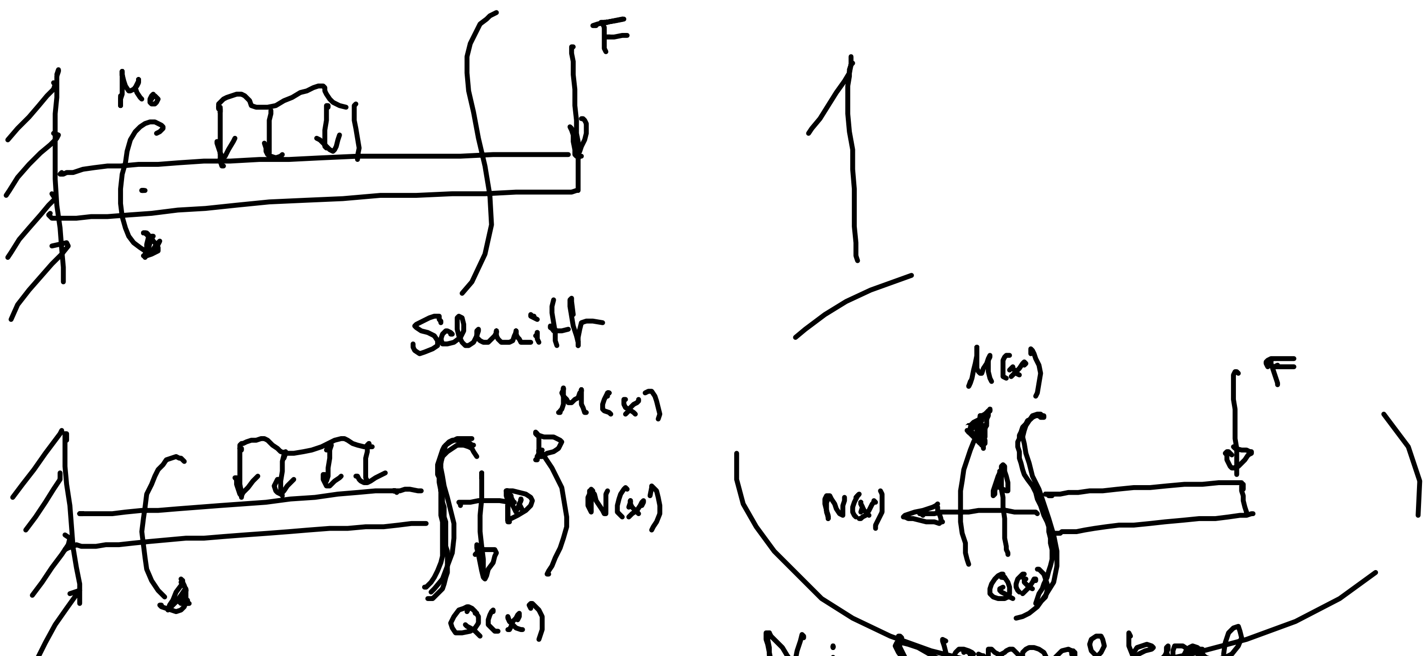
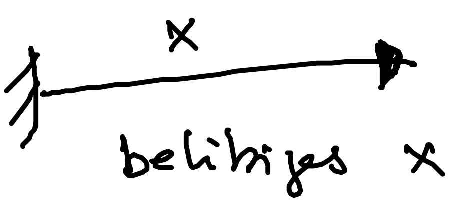
Übung 3.12 in He 101

Übung 10.12 in H 104 Punkt 12

Globalschnittverfahren:

Bestimmt werden die inneren Lasten eines Körpers.



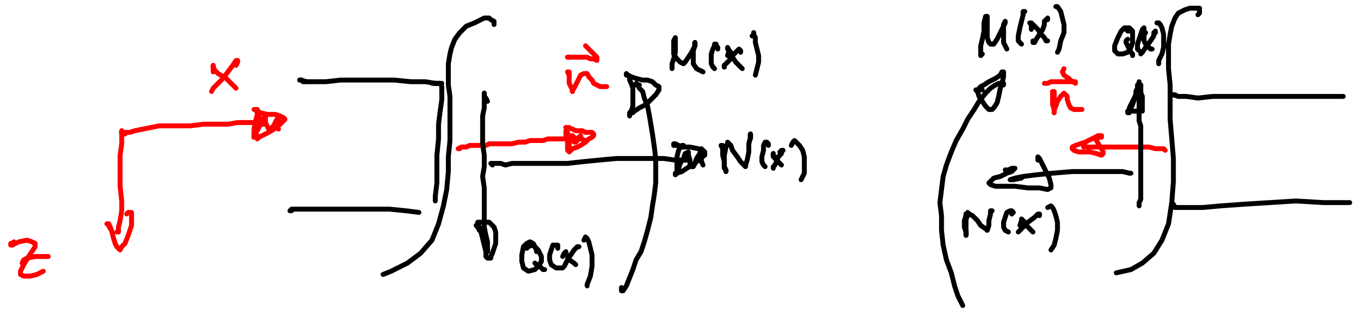


N: Normalkraft

Q: Querkraft

M: Biegemoment

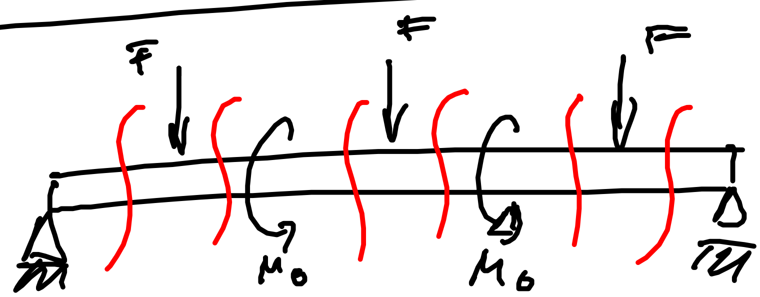
Schnittufer



Der Normalenvektor zeigt aus der Schnittfläche heraus.

Zeigt er in positive Koordinatenrichtung => positives Schnittufer, d.h. Lasten werden positiv angetragen

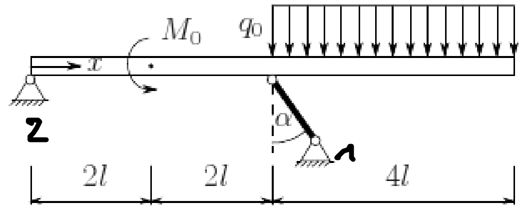
Zeigt $\vec{n}$ in negative Richtung => negatives Schnittufer => Lasten werden negativ angetragen



6 Schnitte wären zur vollständigen Bestimmung von Q(x), N(x) und M(x) nötig!

AUFGABE 65

1. Auf den skizzierten Balken wirkt ein Einzelmoment $M_0 = 4q_0l^2$ und eine konstante Streckenlast q_0. Gesucht sind die Schnittlastenverläufe. Gehen sie zu deten Berechnung wie folgt vor:



   (a) Ist das System statisch bestimmt gelagert? Begründen Sie Ihre Antwort.

   (b) Bestimmen Sie alle Lagerreaktionen.

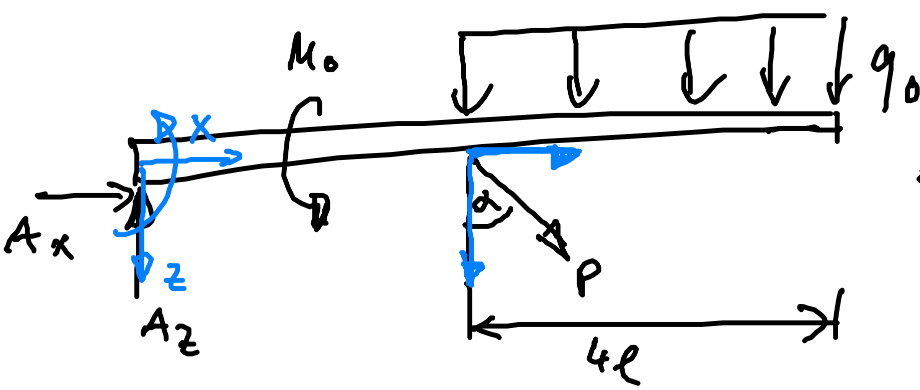
   (c) Berechnen Sie die Schnittgrößen $N(x)$, $Q(x)$ und $M(x)$ und skizzieren Sie diese qualitativ unter Angabe markanter Werte (Nullstellen, Extrema etc.).

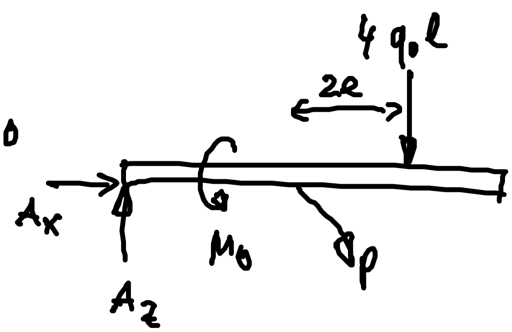
   Geg.: q_0, l, α, $M_0 = 4q_0l^2$

a) ~~Ist~~ statisch Bestimmt

$$n = 3 - 3 = 0 \checkmark$$

b) FS:





GGW:

$$\sum M^{(P)} = 0 = M_0 - 4q_0 l \cdot 2l - A_z \cdot 4l$$

$$A_z = \frac{M_0}{4l} - 2q_0 l$$

$$A_z = \frac{\cancel{4} q_0 l^{\cancel{2}}}{\cancel{4}\cancel{l}} - 2q_0 l$$

$$\boxed{A_z = -q_0 l}$$

$$\sum F_z = 0 = -A_z + P\cos\alpha + 4q_0 l$$

$$P\cos\alpha = A_z - 4q_0 l$$

$$\boxed{P = -\frac{5q_0 l}{\cos\alpha}}$$

$$\sum F_x = 0 = A_x + P\sin\alpha$$

$$A_x = -P\sin\alpha$$

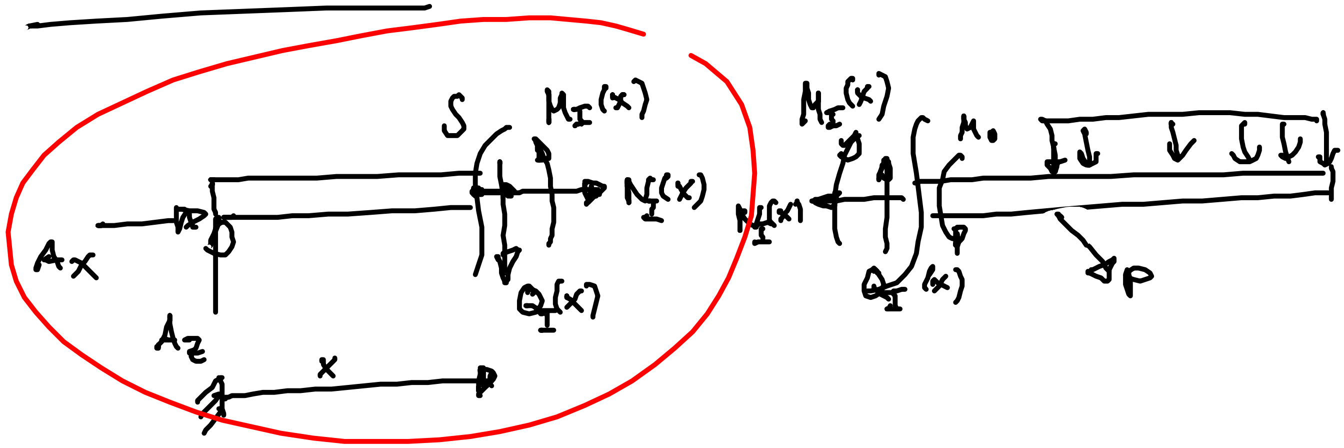
$$A_x = +5q_0 l\tan\alpha$$

---

c) Geschnitten wird in 3 Bereichen

1. Bereich: $0 \le x \le 2l$
2. Bereich: $2l < x \le 4l$
3. Bereich: $4l < x \le 8l$

1. Bereich:



GGW:

$$\sum F_x = 0 = N_I(x) + A_x \Rightarrow \boxed{N_I(x) = -5 q_0 \ell \tan\alpha}$$

$$\sum F_z = 0 = -A_z + Q_I(x)$$

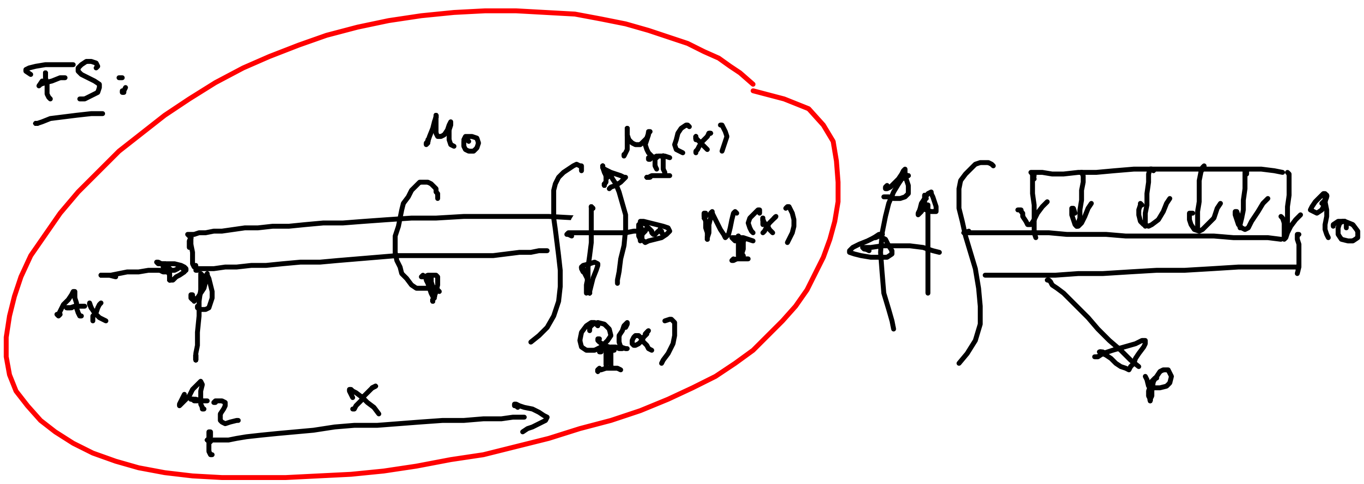
$$\Rightarrow \boxed{Q_I(x) = -q_0 \ell}$$

$$\sum M^{(S)} = 0 = -A_z \cdot x + M_I(x)$$

$$M_I(x) = A_z \cdot x = -q_0 \ell x \qquad \left[\frac{N}{\cancel{m}} \cdot m \cdot \cancel{m}\right]$$

Bereich 2:

FS:



GGW:

$$\sum F_x = 0 = A_x + N_{II}(x)$$

$$\boxed{N_{II}(x) = -5 q_0 \ell \tan\alpha}$$

$$\sum F_z = 0 = -A_z + Q_{II}(x) = \cdot$$

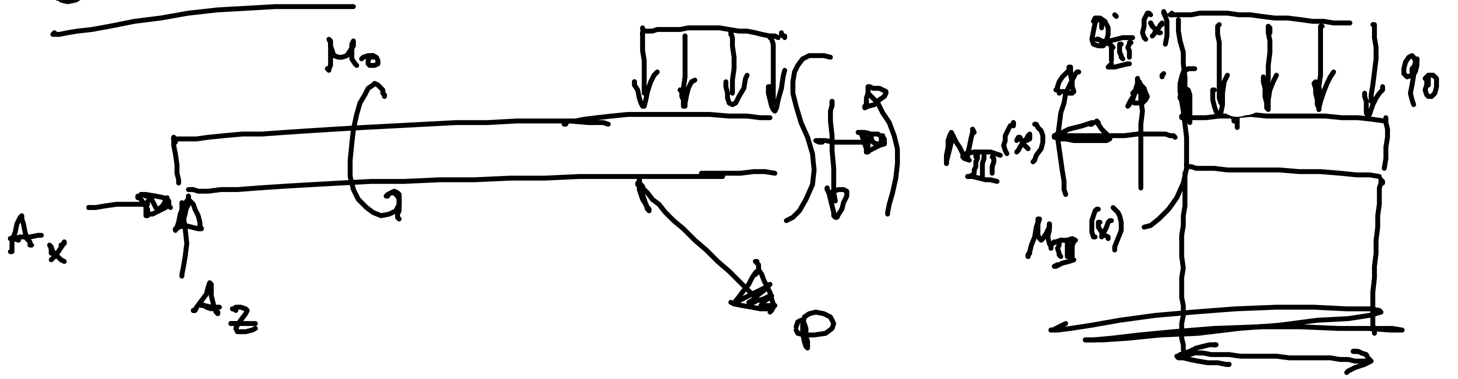
$$\boxed{Q_{II}(x) = Q_I(x) = -q_0 \ell}$$

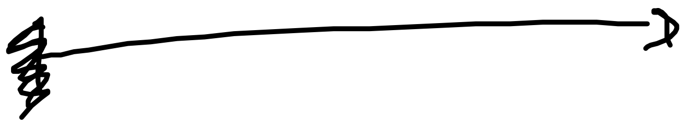
$$\sum M^{(S)} = 0 = M_{II}(x) - A_z \cdot x + M_0$$

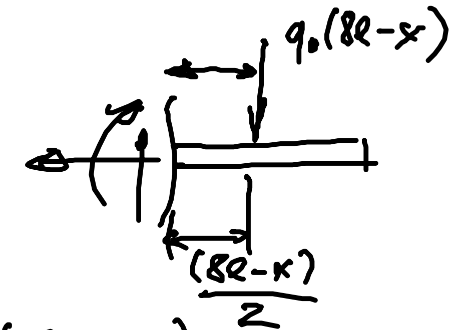
$$M_{II}(x) = -q_0 \ell x - 4 q_0 \ell^2$$

$$M_{II}(x) = -q_0 \ell (x + 4\ell)$$

Bereich B:







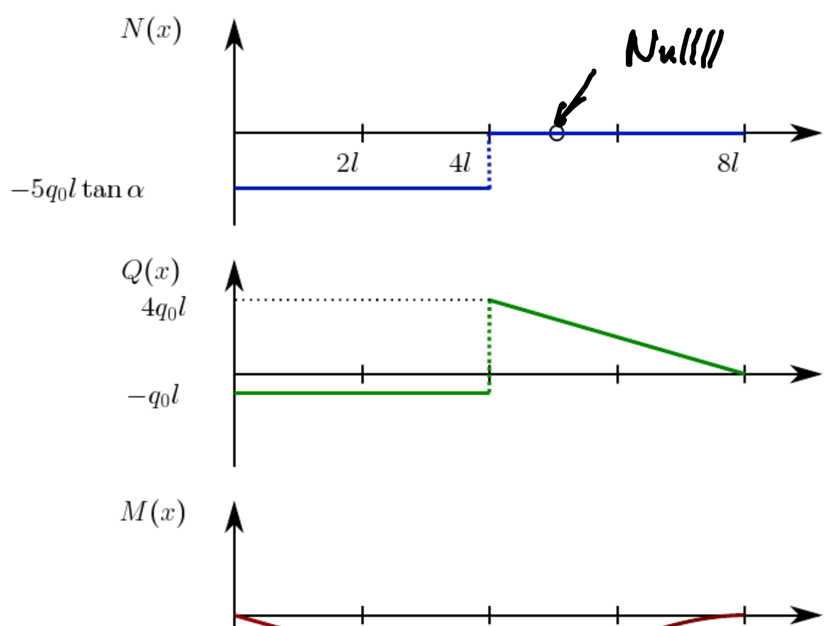
$$\sum F_x = \boxed{0 = -N_{III}(x)}$$

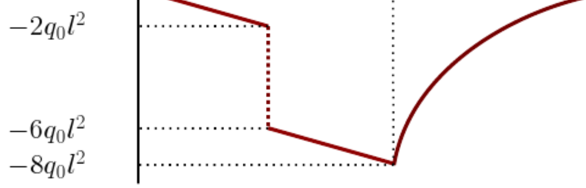
$$\sum F_z = 0 = -Q_{III}(x) + q_0(8l-x)$$

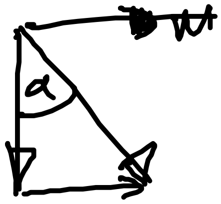
$$Q_{III}(x) = q_0(8l-x)$$

$$\sum M^{(s)} = 0 = -M_{III}(x) - \frac{q_0(8l-x)^2}{2}$$

$$\boxed{M_{III}(x) = -\frac{q_0(8l-x)^2}{2}}$$





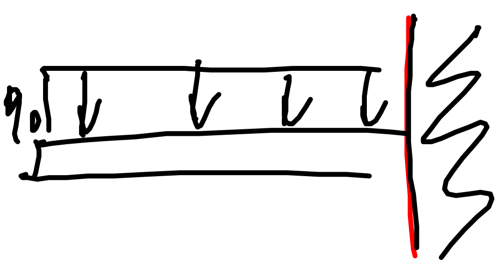


$$-\frac{5q_0 l}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha = -5q_0 l\tan\alpha$$

$$-\frac{5q_0 l}{\cos\alpha}\cdot\cos\alpha \qquad -\frac{5q_0 l}{\cos\alpha}$$

Schnittlastendifferentialgleichung

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dQ}{dx} &= -q(x)\\ \frac{dM}{dx} &= Q(x)\end{aligned}} \iff \frac{d^2M}{dx^2} = -q(x)$$



$$\frac{dQ}{dx} \overset{!}{=} -q_0$$

$$Q(x) = -q_0 x$$

$$\frac{dM}{dx} = -q_0 x$$

$$M(x) = -\frac{q_0}{2}x^2$$

Achtung! Beispiel spezifisch

Zur Berechnung: Integration nutzen

$$\frac{dQ}{dx} = -q(x) \quad \Big| \cdot dx$$

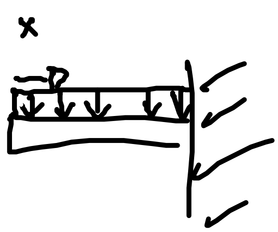
$$\int dQ = -\int q(x)\,dx \quad \Big| \int$$

$$\boxed{Q(x) = -\int q(x)\,dx + C_1}$$

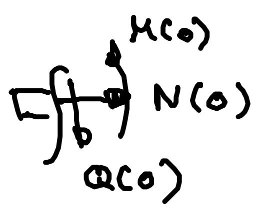
$$\frac{dM}{dx} = Q(x)$$

$$\int dM = \int Q(x)\,dx$$

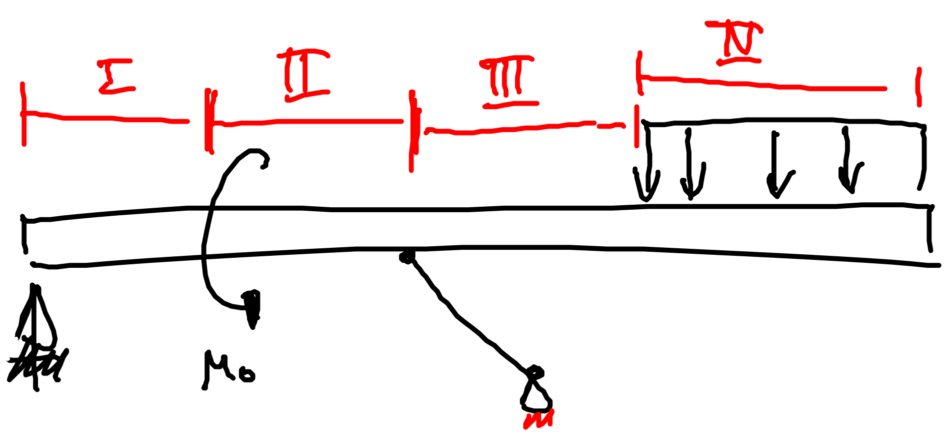
$$\boxed{M(x) = \int Q(x)\,dx + C_2}$$



$\underline{x=0:}$



$\Rightarrow$ $M(0) = 0$, $Q(0) = 0$



Die Integration muß für jeden Bereich durchgeführt werden!

Es entstehen pro Bereich 2 Integrations-konstanten!

Für das Bsp benötigt man daher 2 · 4 Rand und Übergangsbed.

Aufgabe 59

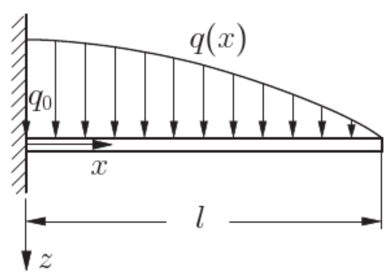
1. Der skizzierte Balken ist links fest eingespannt und wird durch eine cosinusförmige Streckenlast $q(x)$ belastet.

   (a) Berechnen Sie den Verlauf der Schnittgrößen (Biegemoment, Querkraft, Normalkraft).

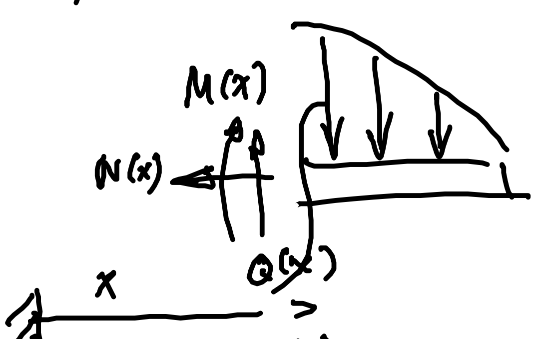
   (b) Skizzieren Sie den Verlauf der Schnittgrößen unter Angabe charakteristischer Werte.

   (c) Wie groß ist das maximale Biegemoment?

   Geg.: q_0, l

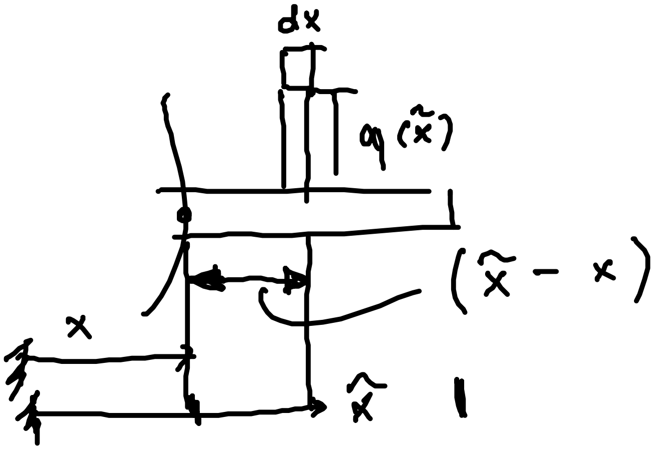


a) Globalschnitt



$$q(x) = q_0 \cos\left(\frac{\pi}{2l} x\right)$$

$$\sum M^{(S)} = 0 = -M(x) - M_{qres}$$



$$M_{ges} = \int_x^l q(\tilde{x}) \cdot (\tilde{x} - x)\, d\tilde{x}$$

$$= \int q_0 \cos\left(\frac{\pi}{2l}\tilde{x}\right)(\tilde{x}-x)\, d\tilde{x}$$

Schnittlastendgl

i) $q(x)$ aufstellen

ii) $Q(x) = -\int q(x)\,dx + C_1$

$$= -\int q_0 \cos\left(\frac{\pi}{2l}x\right)dx + C_1$$

$$Q(x) = -q_0 \frac{2l}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2l}x\right) + C_1$$

$$M(x) = \int Q(x)\,dx + C_2$$

$$= \int\left(-q_0\frac{2l}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2l}x\right) + C_1\right)dx + C_2$$

$$= -q_0\frac{2l}{\pi}\int \sin\left(\frac{\pi}{2l}x\right)dx + \int C_1\,dx + C_2$$

$$M(x) = +q_0\left(\frac{2l}{\pi}\right)^2\cos\left(\frac{\pi}{2l}x\right) + C_1x + C_2$$

iii) RB:

$$M(\ell) = 0$$

$$Q(\ell) = 0$$

$$Q(\ell) = -q_0 \frac{2\ell}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2\cancel{\ell}} \cdot \cancel{\ell}\right) + C_1$$

$$\boxed{C_1 = q_0 \frac{2\ell}{\pi}}$$

$$M(\ell) = q_0 \frac{(4\ell^2)}{\pi^2} \cos \frac{\pi}{2\ell} \cdot \ell + C_1 \cdot \ell + C_2$$

$$\boxed{C_2 = -q_0 \frac{2\ell^2}{\pi}}$$

HA: 61(d), 62, 68

Es folgt:

$$Q(x) = q_0 \frac{2\ell}{\pi}\left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{2\ell} x\right)\right)$$

$$M(x) = q_0 \ell^2 \left(\frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2\ell} x\right) - \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)\right)$$