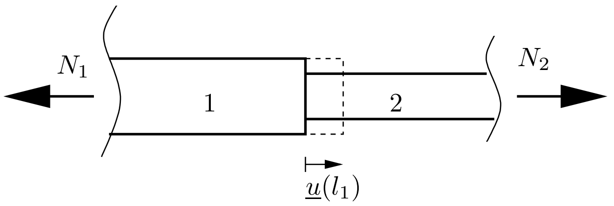
Tutorium

Aufgabe 82

(a)

Gleichgewichtsbedingung:



$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = N_2 \tag{1}$$

Einsetzen der Definition der Spannung $\sigma = \frac{N}{A}$ liefert daraus:

$$\sigma_1 A_1 = \sigma_2 A_2 \tag{2}$$

Zusammenhang der Längenänderungen:

Die Längenänderung der beiden Stäbe sei Δl_1 und Δl_2. Wegen der festen Einspannung rechts und links gilt:

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = 0 \tag{3}$$

Wer das nicht sofort sieht, kann auch auf die uns bekannte Weise die Längenänderungen bestimmen

$$\Delta l_1 = \underline{e}_1 \cdot \underline{u} = \underline{e}_x \cdot \underline{u} = u \tag{4}$$
$$\Delta l_2 = \underline{e}_2 \cdot \underline{u} = -\underline{e}_x \cdot \underline{u} = -u \tag{5}$$
$$\Rightarrow \quad \Delta l_1 = -\Delta l_2 \tag{6}$$

Einsetzen der Definition der Dehnung bei homogener Deformation $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ liefert daraus:

$$\varepsilon_1 l_1 + \varepsilon_2 l_2 = 0 \tag{7}$$

Nach dem Superpositionsprinzip dürfen mechanische und thermische Dehnung zur Gesamtdehnung addiert werden

$$\varepsilon = \varepsilon_{mech} + \varepsilon_{therm} \tag{8}$$
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T \tag{9}$$

Aus (7) und mit (9):

$$\left(\frac{\sigma_1}{E_1} + \alpha_1 \Delta T_1\right) l_1 + \left(\frac{\sigma_2}{E_2} + \alpha_2 \Delta T_2\right) l_2 = 0 \tag{10}$$

Einsetzen von (2) nach σ_2 aufgelöst:

$$\left(\frac{\sigma_1}{E_1} + \alpha_1 \Delta T_1\right) l_1 + \left(\frac{\sigma_1}{E_2}\frac{A_1}{A_2} + \alpha_2 \Delta T_2\right) l_2 = 0 \tag{11}$$

$$\sigma_1 = -\frac{\alpha_1 \Delta T_1 l_1 + \alpha_2 \Delta T_2 l_2}{A_1\left(\frac{l_1}{E_1 A_1} + \frac{l_2}{E_2 A_2}\right)} \tag{12}$$

Einsetzen von (2) nach σ_1 aufgelöst in (10) liefert analog dazu:

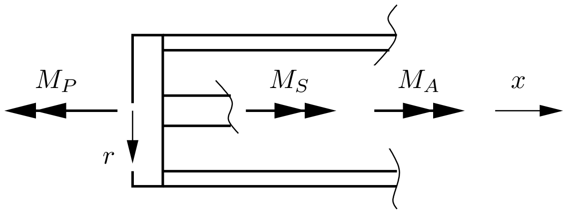
$$\sigma_2 = -\frac{\alpha_1 \Delta T_1 l_1 + \alpha_2 \Delta T_2 l_2}{A_2\left(\frac{l_1}{E_1 A_1} + \frac{l_2}{E_2 A_2}\right)} \tag{13}$$

(b)

$$\sigma_1 = -29{,}2\,\text{MPa} \tag{14}$$
$$\sigma_2 = -45{,}7\,\text{MPa} \tag{15}$$

Aufgabe 90

Freischnitt und Gleichgewichtsbedingungen:



$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad M_P = M_S + M_A \tag{16}$$

M_P ... an der Platte angreifendes äußeres Moment
M_S ... Schnittmoment in der Stahlwelle
M_A ... Schnittmoment in der Alu-Hohlwelle

Geometrie: Durch die Verbindung mit der starren Platte müssen der Verdrehwinkel der Stahlwelle ϑ_S und der Verdrehwinkel der Aluwelle ϑ_A gleich sein (ϑ_p = Verdrehwinkel der Platte gegen die Einspannung):

$$\vartheta_A = \vartheta_S = \vartheta_p \tag{17}$$

Materialgesetz:

$$M = G I_t \frac{d\vartheta}{dx} \tag{18}$$

mit $I_t = I_p$ bei Kreisquerschnitten und $I_p = \int r^2 dA$, hier also für die Vollwelle:

$$I_{t,S} = \int_0^{\frac{d}{2}} r^2\, 2\pi r\, dr = \frac{\pi}{32} d^4 \tag{19}$$

und für die Hohlwelle

$$I_{t,A} = \int_{\frac{d_i}{2}}^{\frac{d_a}{2}} r^2\, 2\pi r dr = \frac{\pi}{32}\left(d_a^4 - d_i^4\right) \tag{20}$$

Integration von (18) über die gesammte Länge l (für den Fall, dass M, G und I_t über l konstant sind, also homogene Torsion vorliegt):

$$Ml = G I_t \vartheta \tag{21}$$

(17) und (21) eingesetzt in (16) ergibt:

$$M_p = \left(G_S I_{t,S} + G_A I_{t,A}\right) \frac{\vartheta_p}{l} \tag{22}$$

Schubwinkel/Drillung: $\gamma = r\,\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$,
HOOKEsches Gesetz: $\tau = G\,\gamma$

$$\tau(r) = G\,\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\, r \tag{23}$$

Offenbar tritt die größte Spannung jeweils am Außenrand der Welle auf. Mit $\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\vartheta_p}{l}$ (homogene Torsion) ergibt sich:

$$\tau_{\max} = G\,\frac{\vartheta_p}{l}\, r_{\text{außen}} \Leftrightarrow \frac{\vartheta_p}{l} = \frac{\tau_{\max}}{G\, r_{\text{außen}}} \tag{24}$$

Das Moment, bei dem am Außenrand der Stahlwelle die zulässige Schubspannung für Stahl τ_S herrscht, ergibt sich aus (24) mit (22):

$$M_{p,S} = \left(G_S\, I_{t,S} + G_A\, I_{t,A}\right) \frac{\tau_S}{G_S \frac{d}{2}} \tag{25}$$

Das Moment, bei dem am Außenrand der Aluwelle die zulässige Schubspanung für Aluminium τ_A herrscht, lautet analog:

$$M_{p,A} = \left(G_S\, I_{t,S} + G_A\, I_{t,A}\right) \frac{\tau_A}{G_A \frac{d_a}{2}} \tag{26}$$

Mit den Zahlenwerten ergibt sich:

$$I_{t,S} = 6{,}14 \cdot 10^{-7} \mathrm{m}^4 \tag{27}$$
$$I_{t,A} = 2{,}00 \cdot 10^{-6} \mathrm{m}^4 \tag{28}$$
$$M_{p,S} = 6190\ \mathrm{N\,m} \tag{29}$$
$$M_{p,A} = 7039\ \mathrm{N\,m} \tag{30}$$

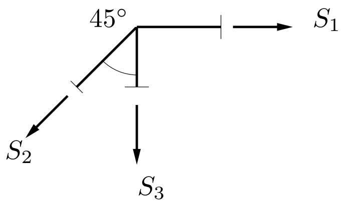
Bei einem Drehmoment größer als 6190 N m wird die zulässige Spannung in der Stahlwelle überschritten. Das maximal zulässige Drehmoment beträgt also:

$$\underline{M_{\text{zul}} = 6190\,\mathrm{N\,m}} \tag{31}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 81

Gleichgewicht:



$$\sum H = 0 \Rightarrow S_1 = S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{32}$$
$$\sum V = 0 \Rightarrow S_3 = -S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{33}$$

Material-Struktur-Gleichung:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{l_1} = \frac{S_1}{EA} + \alpha \Delta T \tag{34}$$
$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{l_2} = \frac{S_2}{EA} \tag{35}$$
$$\varepsilon_3 = \frac{\Delta l_3}{l_3} = \frac{S_3}{EA} \tag{36}$$

Mit den Gleichgewichtsbedingungen und den Material-Struktur-Gleichungen für die 3 Stäbe haben wir zusammen 5 Gleichungen für die 6 Unbekannten: $S_1, S_2, S_3, \Delta l_1, \Delta l_2$ und Δl_3. Die fehlende Gleichung ist eine kinematische Beziehung zwischen den Längenänderungen aller Stäbe.

Kinematik:

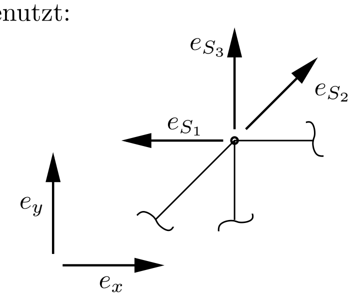
Die linearisierte Verlängerung des Stabs berechnet sich mit der Formel

$$\Delta l = \underline{u} \cdot \underline{e}_S \tag{37}$$

Der Verschiebungsvektor $\underline{u}$ hat die Komponenten u_x und u_y:

$$\underline{u} = u_x \underline{e}_x + u_y \underline{e}_y = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \tag{38}$$

In der vorliegenden Aufgabe wird die Formel (37) für alle drei Stäbe benutzt:



$$\underline{e}_{S_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \Delta l_1 = \underline{u} \cdot \underline{e}_{S1} = -u_x \tag{39}$$
$$\underline{e}_{S_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \Delta l_2 = \underline{u} \cdot \underline{e}_{S2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (u_x + u_y) \tag{40}$$
$$\underline{e}_{S_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \Delta l_3 = \underline{u} \cdot \underline{e}_{S3} = u_y \tag{41}$$

Wir eliminieren mit den Gleichgewichtsbeziehungen (32) und (33) zunächst in den Material-Struktur-Gleichungen (34)–(36) S_1 und S_3 (mit $l_1 = l_3 = b$ und $l_2 = \sqrt{2}b$):

$$\Delta l_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{S_2 b}{EA} + \alpha\Delta T b \tag{42}$$

$$\Delta l_2 = \sqrt{2}\frac{S_2 b}{EA} \tag{43}$$

$$\Delta l_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{S_2 b}{EA} \tag{44}$$

Nun wird auch noch S_2 eliminiert:

$$\Delta l_1 + \Delta l_3 = \alpha\Delta T b \tag{45}$$

$$\Delta l_2 + 2\Delta l_3 = 0 \tag{46}$$

Einsetzen der Beziehungen für die Verschiebung des Knotens P (39), (40) und (41):

$$-u_x + u_y = \alpha\Delta T b \tag{47}$$

$$u_x + (1+2\sqrt{2})u_y = 0 \tag{48}$$

Somit folgt für die Verschiebung des Punktes A

$$u_x = -\frac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}+2}\alpha\,\Delta T\, b \tag{49}$$

$$u_y = \frac{\alpha\,\Delta T\, b}{2\sqrt{2}+2} \tag{50}$$

Das ist eine Verschiebung nach links oben.

Aufgabe 88

(a) Schubverformung bei Kreisquerschnitten:

$$\gamma = r\frac{d\theta}{dx} \tag{51}$$

mit x-Achse als Wellenachse und $\theta(x)$ als Verdrehwinkel der Welle an der Stelle x. γ ist der Gleit- oder Schubwinkel.

Das Hookesche Gesetz verknüpft Torsionsspannungen τ und Gleitungen γ

$$\tau = G\gamma \tag{52}$$

Daraus folgt

$$\tau(r) = G\frac{d\theta}{dx}r \tag{53}$$

Das resultierende Moment der Schubspannungen in der tordierten Welle ist

$$M = \int_A r\tau dA \;\left(= \int_{r_i}^{r_a} r\tau(r)2\pi r dr\right) \tag{54}$$

Mit (53) folgt das Moment, das durch die Verwindung $\frac{d\theta}{dx}$ hervorgerufen wird:

$$M = G\left(\int_A r^2 dA\right)\frac{d\theta}{dx} = GI_p\frac{d\theta}{dx} \tag{55}$$

Der darin enthaltene Ausdruck

$$I_p = \int r^2 dA = 2\pi\int_{r_i}^{r_a} r^3 dr = \frac{\pi}{2}\left(r_a^4 - r_i^4\right) \tag{56}$$

wird als polares Flächenträgheitsmoment bezeichnet.

Die maximale Spannung in der Welle tritt am Außenrand bei $r = r_a$ auf, wie man aus Gl.(53) sofort sieht. Die maximal zulässige Verwindung $\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{max}$ ist dann erreicht, wenn am Außenrand die maximal zulässige Spannung τ_{zul} erreicht wird. Aus (53) ergibt sich:

$$\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{max} = \frac{\tau_{zul}}{G\,r_a} \tag{57}$$

Das Moment, das die Welle dabei überträgt, ergibt sich aus (55) mit (56):

$$M_{max} = \frac{\pi}{2}\frac{r_a^4 - r_i^4}{r_a}\tau_{zul}. \tag{58}$$

$$M_{max,1} = 45{,}20 \text{ kN m} \tag{59}$$

(b) Eine Vollwelle gleicher Masse hat die gleiche Querschnittsfläche πr_{a2}^2 wie die Welle aus Teil (a): $\pi\left(r_{a1}^2 - r_{i1}^2\right)$.

$$\Rightarrow r_{a2} = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{i1}^2} = 55{,}9 \text{ mm} \tag{60}$$

$$\Rightarrow M_{max,2} = 23{,}32 \text{ kN m} \tag{61}$$

⇒ Die Hohlwelle gleicher Querschnittsfläche läßt ein fast doppelt so großes Torsionsmoment im Vergleich zur Vollwelle zu!

(c) Hier gilt analog zu Teil (b):

$$\pi\left(r_{a3}^2 - r_{i3}^2\right) = \pi\left(r_{a1}^2 - r_{i1}^2\right) \tag{62}$$

$$r_{i3} = \sqrt{r_{a3}^2 - r_{a1}^2 + r_{i1}^2} = 82{,}92\,\text{mm} \tag{63}$$

$$M_{max,3} = 70{,}41 \text{ kN m} \tag{64}$$

⇒ Eine Vergrößerung der Radien bei gleicher Querschnittsfläche führt zu einem noch höheren zulässigen Torsionsmoment. Grund dafür ist der Anstieg des polaren Flächenträgheitsmomentes.
