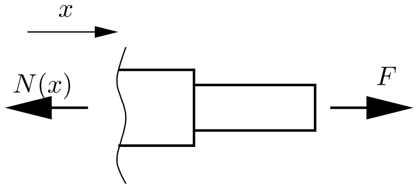
Tutorium

Aufgabe 72

Statisches Gleichgewicht: Schnitt an beliebiger Stelle x:



$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N(x) = F \tag{1}$$

Die Normalkraft im Stab ist konstant gleich F. Das gilt für beide Bereiche!

Materialgesetz:

$$\boxed{\sigma = E\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad \sigma = \frac{N}{A} \tag{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{N = EA\frac{\Delta l}{l}} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta l = l\frac{N}{EA} \tag{3}$$

Geometrie: Die Gesamtlängenänderung ist die Summe der Längenänderungen der beiden Stäbe 1 und 2:

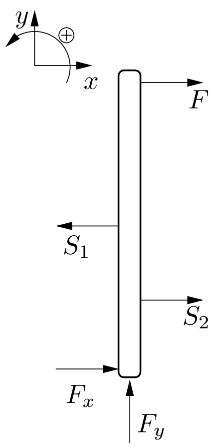
$$\Delta l_{\text{ges}} = \Delta l_1 + \Delta l_2 \tag{4}$$

$$= \frac{l_1}{E_1 A_1}F + \frac{l_2}{E_2 A_2}F \tag{5}$$

$$= 37{,}72\ \mu\text{m} \tag{6}$$

Aufgabe 74

(a) Freischnittskizze und Gleichgewichtsbedingungen



Gleichgewichtsbedingungen am unverformten System:

$$\sum M^{(F)} = 0$$

$$-F \cdot 2a + S_1 \cdot a - S_2 \cdot \frac{a}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2S_1 - S_2 = 4F \tag{7}$$

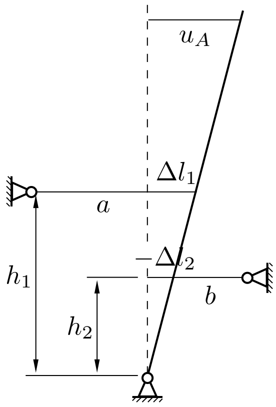
Man erkennt, dass nicht alle unbekannten Kräfte F_x, F_y und S_1, S_2 aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden können. Das System ist einfach statisch unbestimmt.

(b) Materialgesetz

$$S_1 = EA \cdot \frac{\Delta l_1}{a} \tag{8}$$

$$S_2 = EA \cdot \frac{\Delta l_2}{b} \tag{9}$$

Verformungen



Längen in der verformten Lage:

$$l_1 = a + \Delta l_1$$

$$l_2 = b + \Delta l_2$$

Δl_1, Δl_2 sind Verlängerungen der Stäbe.

$$\frac{\Delta l_1}{h_1} = \frac{-\Delta l_2}{h_2}$$

$$\Delta l_1 = -\frac{h_1}{h_2}\Delta l_2 = -2\,\Delta l_2 \tag{10}$$

Die vier Gleichungen (7) - (10) ermöglichen die Berechnungen der vier Unbekannten S_1, S_2, Δl_1 und Δl_2.

(8), (9) in (10)

$$\frac{aS_1}{EA} + \frac{2bS_2}{EA} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad aS_1 + 2bS_2 = 0 \tag{11}$$

$$(11), (7) \;\Rightarrow\; S_2 = -\frac{4a}{a+4b}F \,<\, 0 \quad \text{(Druck)} \tag{12}$$

$$S_1 = \frac{8b}{a+4b}F \,>\, 0 \quad \text{(Zug)} \tag{13}$$

$$S_2 = \text{-}1{,}67\ \text{kN},\; S_1 = 4{,}17\ \text{kN} \tag{14}$$

(c) horizontale Auslenkung des Punktes A aus der Verformungsskizze oben mit Strahlensatz:

$$u_A = 2\Delta l_1 \tag{15}$$

$$= \frac{2aS_1}{EA} = \frac{16abF}{EA(a+4b)} = 0{,}0579\ \text{mm} \tag{16}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 70

(a)

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = 2{,}5\ 10^{-3} \tag{17}$$

(b)

$$\sigma = E\varepsilon = 525\ \mathrm{N/mm^2} \tag{18}$$

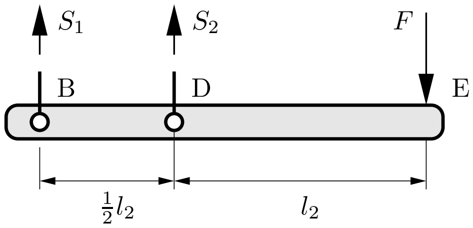
(c)

$$F = A\sigma \quad \Rightarrow \quad A = \frac{F}{\sigma} = 19{,}05\ \mathrm{mm}^2 \tag{19}$$

$$A = \frac{\pi}{4}d^2 \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 4{,}92\ \mathrm{mm} \tag{20}$$

Aufgabe 73

(a) Freischnitt und Gleichgewichtsbedingungen:



$$\sum M^{(D)} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 = -2F \tag{21}$$

$$\sum M^{(B)} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_2 = 3F \tag{22}$$

Materialgesetze und Verschiebungsverzerrungsgleichungen:

$$\boxed{\sigma = E\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad \sigma = \frac{S}{A} \tag{23}$$

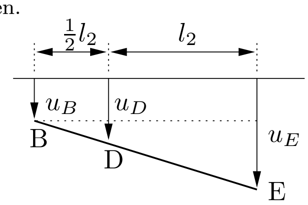
$$\Rightarrow \boxed{S = EA\frac{\Delta l}{l}} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta l = l\frac{S}{EA} \tag{24}$$

Stab AB: $$\Delta l_1 = l_1\frac{-2F}{E_1A_1} = -0{,}514\ \mathrm{mm} \tag{25}$$

Stab CD: $$\Delta l_2 = l_2\frac{3F}{E_2A_2} = 0{,}3\ \mathrm{mm} \tag{26}$$

Stab AB wird also kürzer und Stab CD länger.

(b) Aus dem Strahlensatz wird die Verschiebung u_E des Punktes E bestimmt: *Hinweis:* In der folgenden Skizze haben alle Größen positive Werte, damit beim dann folgenden Ableiten der Gleichungen die Bestimmung des richtigen Vorzeichens leichter fällt. Die Skizze zeigt also nicht die gerade berechneten Längenänderungen.



Aus dem Strahlensatz wird die Verschiebung u_E des Punktes E bestimmt:

$$\text{mit} \quad u_B = \Delta l_1\,, \ u_D = \Delta l_2 \tag{27}$$

$$\frac{u_E - u_B}{\frac{3}{2}l_2} = \frac{u_D - u_B}{\frac{1}{2}l_2} \tag{28}$$

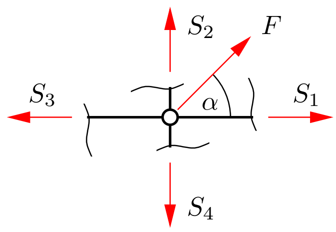
$$\Rightarrow \ u_E = 3\Delta l_2 - 2\Delta l_1 \tag{29}$$

$$u_E = F\left(\frac{9l_2}{E_2A_2} + \frac{4l_1}{E_1A_1}\right) = 1{,}93\ \mathrm{mm} \tag{30}$$

Aufgabe 78

Das System ist statisch unbestimmt, d.h. die Gleichgewichtsbedingungen allein reichen nicht aus, um die Stabkräfte zu berechnen.

Freischnitt des unverformten Systems:



Gleichgewichtsbedingungen am unverformten System:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 - S_3 + F\cos\alpha = 0 \tag{31}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad S_2 - S_4 + F\sin\alpha = 0 \tag{32}$$

Modifizierte Materialgesetze:

$$S_i = EA\frac{\Delta l_i}{l_i} \tag{33}$$

Die Querschnittsfläche aller Stäbe ist

$$A = D^2 \tag{34}$$

Die Längen der Stäbe in der unverformten Lage sind

$$l_1 = b; \qquad l_2 = d; \tag{35}$$

$$l_3 = a; \qquad l_4 = c; \tag{36}$$

Geometrisch linearisierte Verformungskinematik:

Die Längenänderungen der Stäbe werden durch Projektionen des Verschiebungsvektors $\underline{u}_P$ auf die Stabrichtungen der unverformten Lage gebildet. Die Stabeinheitsvektoren weisen dabei stets entlang der Stäbe zum Punkt hin, welcher sich verschiebt. Der Verschiebungsvektor $\underline{u}_P$ setzt sich bei Zugrundelegung einer kartesischen Basis, deren Basisvektoren in Richtung der positiven Koordinatenrichtungen zeigen, wie folgt zusammen:

$$\underline{u}_P = u_x\underline{e}_x + u_y\underline{e}_y \tag{37}$$

Die Längenänderungen der Stäbe sind

$$\Delta l_1 = \underline{e}_1 \cdot \underline{u}_P = -\underline{e}_x \cdot \underline{u}_P = -u_x \tag{38}$$

$$\Delta l_2 = \underline{e}_2 \cdot \underline{u}_P = -\underline{e}_y \cdot \underline{u}_P = -u_y \tag{39}$$

$$\Delta l_3 = \underline{e}_3 \cdot \underline{u}_P = \underline{e}_x \cdot \underline{u}_P = u_x \tag{40}$$

$$\Delta l_4 = \underline{e}_4 \cdot \underline{u}_P = \underline{e}_y \cdot \underline{u}_P = u_y \tag{41}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta l_1 = -\Delta l_3 = -u_x \tag{42}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta l_2 = -\Delta l_4 = -u_y \tag{43}$$

Einsetzen in (33) liefert

$$S_1 = -\frac{EA}{b}u_x; \qquad S_3 = \frac{EA}{a}u_x; \tag{44}$$

$$S_2 = -\frac{EA}{d}u_y; \qquad S_4 = \frac{EA}{c}u_y; \tag{45}$$

Einsetzen der Gleichungen (44) in (31)

$$-EA(\frac{1}{b} + \frac{1}{a})u_x + F\cos\alpha = 0 \Rightarrow \underline{\underline{u_x = \frac{F\cos\alpha}{EA(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})}}} \tag{46}$$

Einsetzen der Gleichungen (45) in (32)

$$-EA(\frac{1}{c} + \frac{1}{d})u_y + F\sin\alpha = 0 \Rightarrow \underline{\underline{u_y = \frac{F\sin\alpha}{EA(\frac{1}{c} + \frac{1}{d})}}} \tag{47}$$