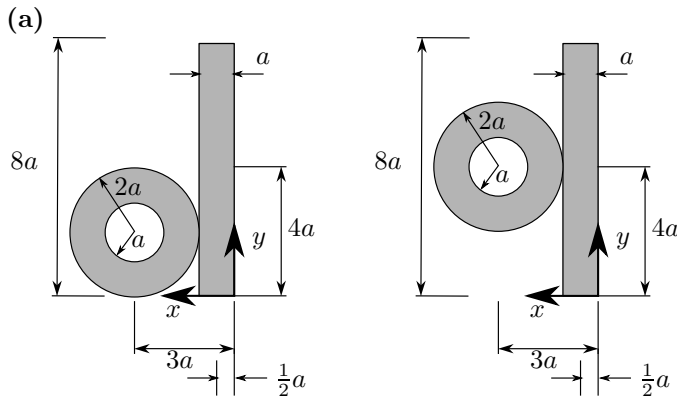


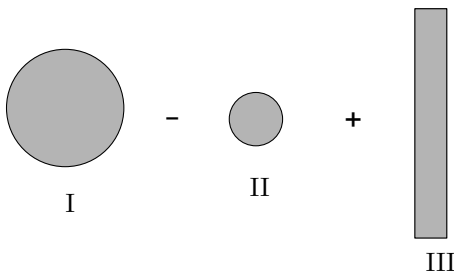
Tutorium

GGB:

Aufgabe 24



Die Koordinaten für das Tabellenverfahren können der Skizze entnommen werden. Der Körper setzt sich zusammen aus:



Damit ergibt sich folgende Tabelle:

	A_i	x_i	y_i	$x_i A_i$	$y_i A_i$
I	$4a^2\pi$	$3a$	$2a$	$12\pi a^3$	$8\pi a^3$
II	$-a^2\pi$	$3a$	$2a$	$-3\pi a^3$	$-2\pi a^3$
III	$8a^2$	$\frac{a}{2}$	$4a$	$4a^3$	$32a^3$
	$(8 + 3\pi)a^2$	-	-	$(4 + 9\pi)a^3$	$(32 + 6\pi)a^3$

Damit ergibt sich für die Schwerpunktskoordinaten:

$$x_s = \frac{\sum x_i A_i}{A_i} = \frac{4 + 9\pi}{8 + 3\pi} a \approx 1,85a \quad (1)$$

$$y_s = \frac{\sum y_i A_i}{A_i} = \frac{32 + 6\pi}{8 + 3\pi} a \approx 2,92a \quad (2)$$

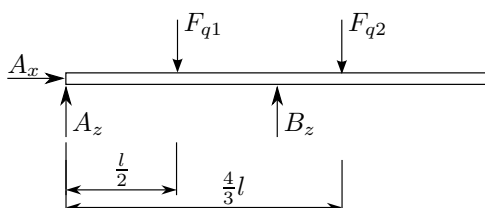
(b) Im zweiten System ändert sich die x_s -Koordinate nicht. Die Kugel wird nun gerade so verschoben, dass um $y = 4a$ Symmetrie herrscht. Dies bedeutet, dass $y_s = 4a$ ist.

Aufgabe 63

(a) Schnittlasten

(i) Globalschnittverfahren

Zunächst wird der Balken freigeschnitten und die Streckenlast durch ihre Resultierende ersetzt.



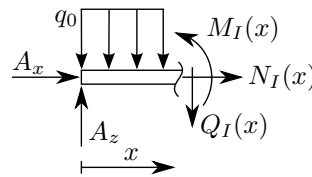
$$\sum M^{(A)} = B_z \cdot l - F_{q1} \cdot \frac{l}{2} - F_{q2} \cdot \frac{4}{3}l \quad (3)$$

$$\Rightarrow B_z = \frac{1}{2}F_{q1} + \frac{4}{3}F_{q2} = \frac{1}{2}q_0l + \frac{2}{3}q_0l = \underline{\underline{\frac{7}{6}q_0l}}$$

$$\sum F_z = -A_z - B_z + F_{q1} + F_{q2} = 0 \quad (4)$$

$$\Rightarrow A_z = -\frac{7}{6}q_0l + q_0l \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{3}q_0l}}$$

I. Bereich: $0 \leq x < l$



Funktion der Streckenlast im Bereich I:

$$q_I(x) = q_0 \quad (5)$$

Resultierende der Streckenlast in Abhängigkeit des Schnittpunkts:

$$F_{qx}(x) = q_I(x) \cdot x = q_0 \cdot x \quad (6)$$

GGB:

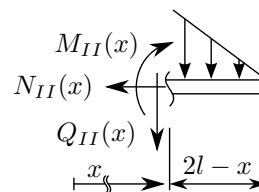
$$\sum F_z = Q_I(x) + F_{qx} - A_z = 0 \quad (7)$$

$$\Rightarrow Q_I(x) = \underline{\underline{-q_0x + \frac{1}{3}q_0l}} \quad (8)$$

$$\sum M^{(S)} = M_I(x) - A_z \cdot x + F_{qx} \cdot \frac{x}{2} = 0 \quad (9)$$

$$\Rightarrow M_I(x) = \underline{\underline{-q_0l \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}q_0lx}} \quad (10)$$

II. Bereich: $l \leq x \leq 2l$



Funktion der Streckenlast im Bereich II:

$$q_{II}(x) = \frac{q_0}{l}(2l - x) \quad (11)$$

Resultierende der Streckenlast in Abhängigkeit des Schnittpunkts:

$$F_{qx}(x) = q_{II}(x) \cdot (2l - x) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{q_0}{l} (2l - x)^2 \quad (12)$$

GGB:

$$\sum F_z = -Q_{II}(x) + F_{qx} = 0 \quad (13)$$

$$\Rightarrow Q_{II}(x) = \underline{\underline{\frac{1}{2} \frac{q_0}{l} (2l - x)^2}} \quad (14)$$

$$\sum M^{(S)} = -M_{II}(x) + F_{qx} \cdot \frac{1}{3} (2l - x) = 0 \quad (15)$$

$$\Rightarrow M_{II}(x) = \underline{\underline{-\frac{1}{6} \frac{q_0}{l} (2l - x)^3}} \quad (16)$$

(ii) Lösung mittels Schnittlasten-DGL

I. Bereich: $0 \leq x < l$, $q_I(x) = q_0$

$$Q'_I(x) = -q_I(x) = -q_0 \quad (17)$$

$$Q_I(x) = -q_0 x + C_1 \quad (18)$$

$$M_I(x) = -q_0 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \quad (19)$$

II. Bereich: $l \leq x \leq 2l$, $q_{II}(x) = -\frac{q_0}{l} x + 2q_0$

$$Q'_{II}(x) = -q_{II}(x) = \frac{q_0}{l} x - 2q_0 \quad (20)$$

$$Q_{II}(x) = \frac{q_0}{l} \frac{x^2}{2} - 2q_0 x + C_3 \quad (21)$$

$$M_{II}(x) = \frac{q_0}{l} \frac{x^3}{6} - q_0 x^2 + C_3 x + C_4 \quad (22)$$

Dynamische Rand- und Übergangsbedingungen:

$$M_I(0) = 0 \quad (23)$$

$$M_I(l) = M_{II}(l) \quad (24)$$

$$M_{II}(2l) = 0 \quad (25)$$

$$Q_{II}(2l) = 0 \quad (26)$$

Aus (23) folgt

$$C_2 = 0 \quad (27)$$

Aus (26) folgt

$$C_3 = 2q_0 l \quad (28)$$

Aus (25) und (28) folgt

$$C_4 = -\frac{4}{3} q_0 l^2 \quad (29)$$

Aus (24), (27), (28) und (29) folgt schließlich noch

$$C_1 = \frac{1}{3} q_0 l \quad (30)$$

Für die Schnittlastenverläufe ergibt sich

$$Q_I(x) = -q_0 x + \frac{1}{3} q_0 l \quad (31)$$

$$M_I(x) = -q_0 \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} q_0 l x \quad (32)$$

$$Q_{II}(x) = \frac{q_0}{l} \frac{x^2}{2} - 2q_0 x + 2q_0 l \quad (33)$$

$$M_{II}(x) = \frac{q_0}{l} \frac{x^3}{6} - q_0 x^2 + 2q_0 l x - \frac{4}{3} q_0 l^2 \quad (34)$$

(b) Betragsmäßig größtes Biegemoment

Für relative Extrema gilt $M'(x) \stackrel{!}{=} 0$, daraus folgt

$Q(x) \stackrel{!}{=} 0$.

I. Bereich:

$$Q_I(x) = -q_0 x + \frac{1}{3} q_0 l = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3} l \quad (35)$$

$$\underline{\underline{M_I(x = \frac{1}{3} l) = \frac{1}{18} q_0 l^2}} \quad (36)$$

II. Bereich:

$$Q_{II}(x) = \frac{q_0}{l} \frac{x^2}{2} - 2q_0 x + 2q_0 l = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = 2l \quad (37)$$

$$\underline{\underline{M_{II}(x = 2l) = 0}} \quad (38)$$

Untersuchung der Ränder und Bereichsübergänge:

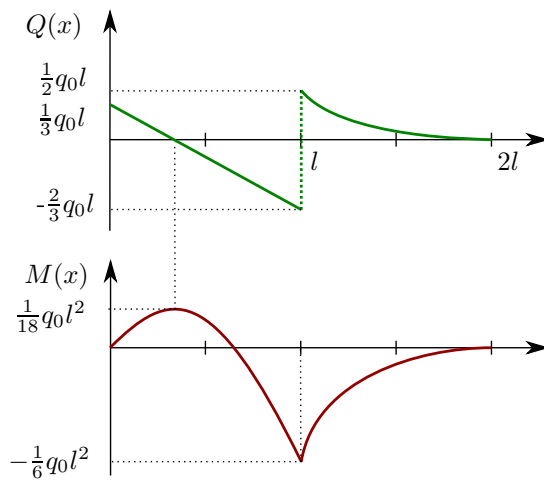
An den Systemränder $x = 0$ und $x = 2l$ verschwindet das Biegemoment jeweils. An der Bereichsgrenze gilt:

$$M_I(l) = M_{II}(0) = -\frac{1}{6} q_0 l^2 \quad (39)$$

\Rightarrow An der Stelle $x = l$ ist das Moment betragsmäßig am größten.

$$\underline{\underline{|M(x)|_{\max} = |M(l)| = \frac{1}{6} q_0 l^2}} \quad (40)$$

(c) Graphische Veranschaulichung der Schnittlasten



Auf die Vorzeicheneinträge in den Flächen darf hier verzichtet werden, da die positiven Zählrichtungen der Achsen angegeben sind.
