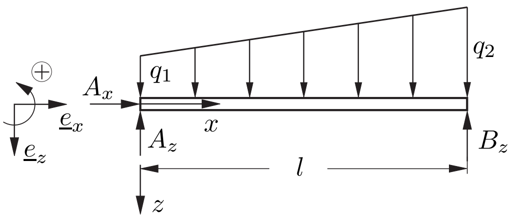
Tutorium

Aufgabe 60

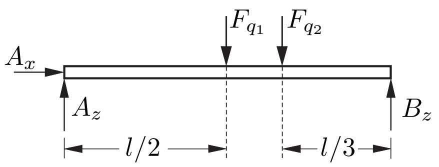
Freimachskizze:

$$q(x) = \frac{q_2 - q_1}{l}\, x + q_1 \tag{1}$$



Ersatzsystem: mit $F_{q_1} = q_1 \cdot l$ (2)

$$F_{q_2} = \frac{(q_2 - q_1)\cdot l}{2} \tag{3}$$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{A_x = 0} \tag{4}$$

$$\sum M^{(A)} = 0 \Rightarrow -F_{q_1}\cdot\frac{l}{2} - F_{q_2}\cdot\frac{2}{3}l + B_z\cdot l = 0 \tag{5}$$

$$B_z = \frac{F_{q_1}}{2} + \frac{2}{3}F_{q_2} = \frac{1}{2}q_1\cdot l + \frac{1}{3}(q_2 - q_1)\cdot l \tag{6}$$

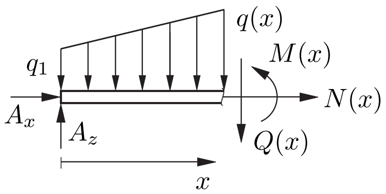
$$= \underline{\frac{1}{6}(q_1 + 2q_2)\cdot l} \tag{7}$$

$$\sum M^{(B)} = 0 \Rightarrow F_{q_1}\cdot\frac{l}{2} + F_{q_2}\cdot\frac{l}{3} - A_z\cdot l = 0 \tag{8}$$

$$A_z = \frac{F_{q_1}}{2} + \frac{F_{q_2}}{3} = \underline{\frac{1}{6}(2q_1 + q_2)\cdot l} \tag{9}$$

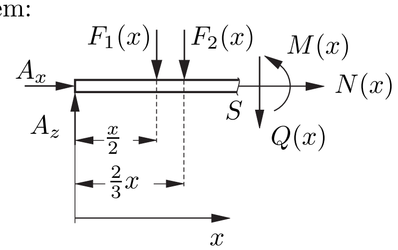
Schnittlasten:

Freischnitt:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N(x) = -A_x = 0 \tag{10}$$

Ersatzsystem:



$$F_1(x) = q_1\cdot x \tag{11}$$

$$F_2(x) = \frac{q(x) - q_1}{2}\, x = \frac{q_2 - q_1}{2l}\, x^2 \tag{12}$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow -A_z + F_1(x) + F_2(x) + Q(x) = 0 \tag{13}$$

$$Q(x) = A_z - F_1(x) - F_2(x) \tag{14}$$

$$= -\frac{q_2 - q_1}{2l}x^2 - q_1 x + \frac{1}{6}(2q_1 + q_2)\, l \tag{15}$$

$$\sum M^{(S)} = 0 \Rightarrow \tag{16}$$

$$M(x) + F_2(x)\,\frac{x}{3} + F_1(x)\,\frac{x}{2} - A_z\cdot x = 0 \tag{17}$$

$$M(x) = \frac{1}{6}(2q_1 + q_2)\, l\cdot x - \frac{q_2 - q_1}{6l}x^3 - q_1\,\frac{x^2}{2} \tag{18}$$

Lösung mit der Schnittlasten-Differentialgleichung

Für das Biegemoment $M(x)$, die Querkraft $Q(x)$ und die äußere Belastung $q(x)$ gelten die Differentialgleichungen

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x) \quad , \quad \frac{dQ(x)}{dx} = -q(x) \quad .$$

Einsetzen der Streckenlast $q(x)$ führt auf

$$M(x) = \frac{q_1 - q_2}{6l}x^3 - \frac{q_1}{2}x^2 + C_1 x + C_2 \quad , \tag{19}$$

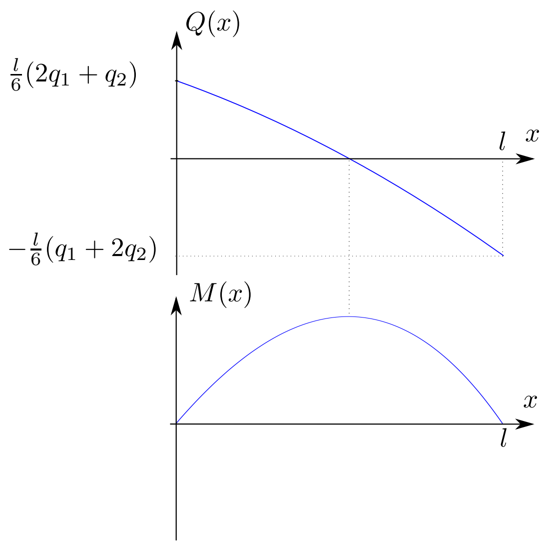
mit den Integrationskonstanten C_1 und C_2. In den Punkten A und B ist der Balken gelenkig gelagert. Demnach gilt

$$M(0) = 0 \quad , \quad M(l) = 0 \quad .$$

Einsetzen dieser Randbedingungen in (19) liefert das gesuchte Ergebnis

$$M(x) = \frac{(q_1 - q_2)\, l^2}{6}\left(\frac{x}{l}\right)^3 - \frac{q_1 l^2}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \frac{(2q_1 + q_2)\, l^2}{6}\left(\frac{x}{l}\right)$$

$$Q(x) = \frac{(q_1 - q_2)\, l}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 - q_1 l\left(\frac{x}{l}\right) + \frac{(2q_1 + q_2)\, l}{6} \quad .$$



Aufgabe 61

(a) Die Schnittlastendifferentialgleichungen lauten

$$\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x} = Q(x) \quad , \quad \frac{\mathrm{d}Q(x)}{\mathrm{d}x} = -q(x) \quad . \tag{20}$$

(b) Für Träger wird in zwei Bereiche geteilt: Bereich 1 mit $0 < x < 3l$ ($x_1 \in [0, 3l]$) und Bereich 2 mit $3l < x < 5l$ ($x_2 \in [0, 2l]$). Die Teilung bei $x = 3l$ ist nötig, da dort die Streckenlast einen Sprung hat. Für die Streckenlast gilt

$$q(x_1) = \frac{q_0}{3l} x_1$$
$$q(x_2) = -q_0 \quad .$$

(c) Die Rand- und Übergangsbedingungen lauten

$$M(x_2 = 2l) = 0 \tag{21}$$
$$Q(x_2 = 2l) = 0 \tag{22}$$
$$M(x_2 = 0) = M(x_1 = 3l) \tag{23}$$
$$Q(x_2 = 0) = Q(x_1 = 3l) \tag{24}$$

Die Querkraft weist bei $x = 3l$ einen Knick auf, da dort die Streckenlast von q_0 auf $-q_0$ springt.

(d) Durch Integration von (20) im Abschnitt BC (Bereich 2) erhält man

$$Q(x_2) = q_0 x_2 + C_1$$
$$M(x_2) = \frac{1}{2} q_0 x_2^2 + C_1 x_2 + C_2 \quad .$$

Einsetzen der Randbedingungen (21) und (22) führt auf die Gleichungen

$$0 = 2q_0 l + C_1$$
$$0 = \frac{4}{2} q_0 l^2 + 2C_1 l + C_2$$

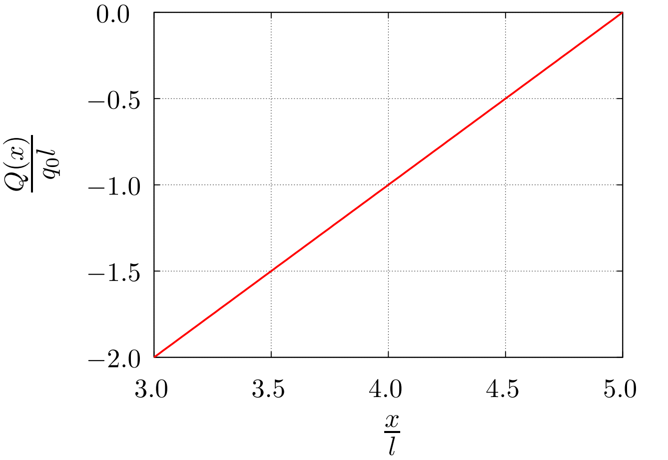
und schließlich auf die Konstanten

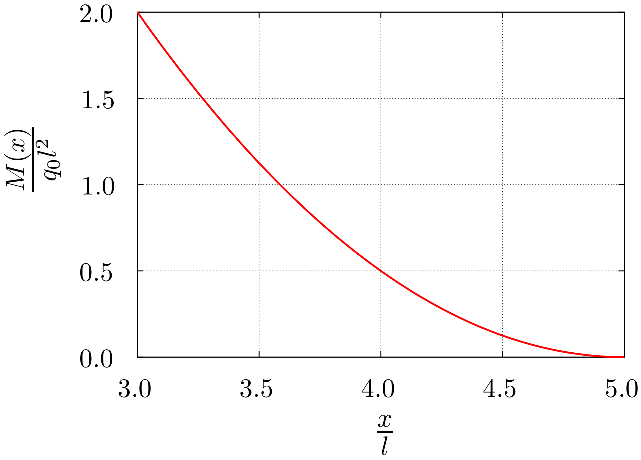
$$C_1 = -2q_0 l \quad , \quad C_2 = +2q_0 l^2 \quad .$$

Einsetzen ergibt

$$Q(x_2) = q_0 l \left(\frac{x_2}{l} - 2 \right)$$
$$M(x_2) = q_0 l^2 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x}{l} \right)^2 - 2\frac{x}{l} + 2 \right) \quad .$$

(e) Die Diagramme zeigen die entsprechenden Kurven.



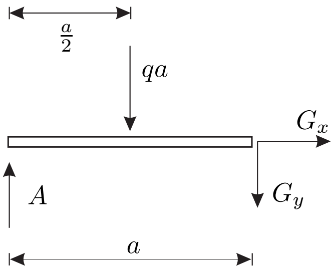


Hausaufgaben

Aufgabe 62

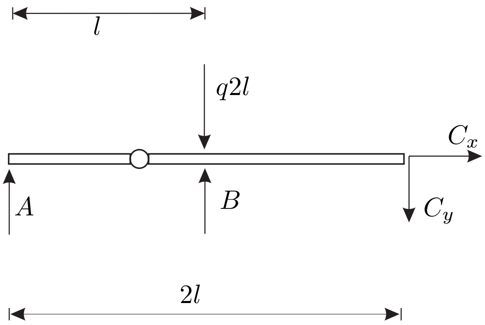
Zur Lösung der Aufgabe muss der Verlauf des Biegemomentes bestimmt werden.

Bestimmung der Auflagekräfte:
am Teilsystem



$$\sum M^{(G)} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}qa \tag{25}$$

am Gesamtsystem:



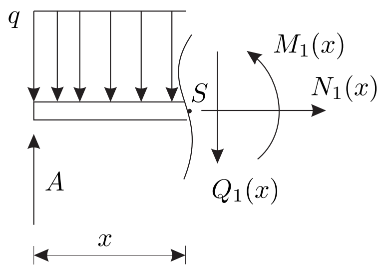
$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad C_x = 0 \tag{26}$$

$$\sum M^{(B)} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y = A = \frac{1}{2}qa \tag{27}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad B = q\,(2l - a) \tag{28}$$

<u>Biegemomentenverlauf</u>

Abschnitt 1: $0 < x < l$

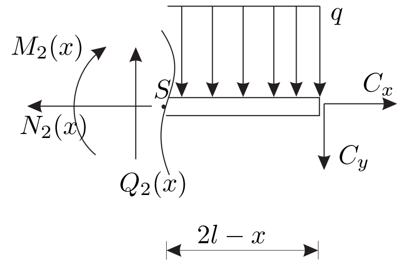


$$\sum M^{(S)} = M_1(x) - Ax + \frac{1}{2}qx^2 = 0 \tag{29}$$

$$\Rightarrow \quad M_1(x) = Ax - \frac{1}{2}qx^2$$

$$M_1(x) = \frac{1}{2}ql^2\left[\frac{ax}{l^2} - \left(\frac{x}{l}\right)^2\right] \tag{30}$$

Abschnitt 2: $l < x < 2l$



$$\sum M^{(S)} = -M_2(x) + C_y(2l - x) - \frac{1}{2}q(2l - x)^2 = 0 \tag{31}$$

$$\Rightarrow \quad M_2(x) = \frac{1}{2}qa(2l - x) - \frac{1}{2}q(2l - x)^2$$

$$M_2(x) = \frac{1}{2}ql^2\left[\frac{2a}{l} + \left(4 - \frac{a}{l}\right)\frac{x}{l} - 4 - \left(\frac{x}{l}\right)^2\right] \tag{32}$$

<u>Maximales Biegemoment</u>

Die Länge a kann nun so bestimmt werden, dass das maximale Biegemoment möglichst klein ist. Die notwendige Bedingung für ein lokales Maximum lautet:

$$\frac{dM}{dx} \stackrel{!}{=} 0 \tag{33}$$

Im Bereich $0 \leq x < l$:

$$0 = q\left(\frac{a}{2} - x_1\right) \tag{34}$$

$$\Rightarrow \; x_1 = \frac{a}{2} \; \Rightarrow \; M(x_1) = \frac{qa^2}{8} \tag{35}$$

Im Bereich $l < x \leq 2l$:

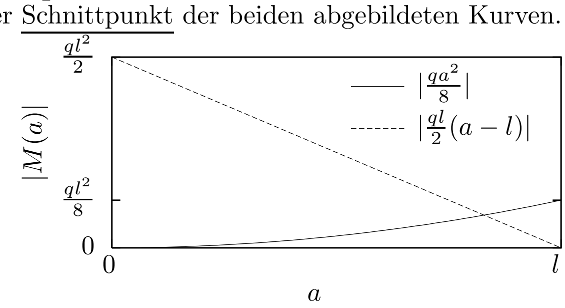
$$0 = q\left(2l - \frac{a}{2} - x_2\right) \tag{36}$$

$$\Rightarrow \; x_2 = 2l - \frac{a}{2} \; \Rightarrow \; M(x_2) = \frac{qa^2}{8} \tag{37}$$

Neben lokalen Maxima im Inneren der Gebiete können auch Maxima an den Gebietsrändern bei $x = 0$, $x = l$ oder $x = 2l$ auftreten. Bei $x = 0$ sowie bei $x = 2l$ ist wegen der Gelenke das Moment Null (also sicher nicht maximal). Das Moment bei $x = l$ ist

$$M(x_3 = l) = \frac{ql}{2}(a - l) \tag{38}$$

Das maximale Biegemoment folgt je nach Wert für a entweder aus Gleichung (35) bzw. (37) oder (38). Aus der folgenden Skizze wird ersichtlich, daß das größere Biegemoment minimal ist für dasjenige a, bei dem $|\frac{qa^2}{8}|$ aus (37) und $|\frac{ql}{2}(a-l)|$ aus (38) gleich werden; gesucht ist demnach der <u>Schnittpunkt</u> der beiden abgebildeten Kurven.



Also gilt:

$$M_{\text{opt}} = \frac{qa_{\text{opt}}^2}{8} = \frac{ql}{2}(l - a_{\text{opt}}) \tag{39}$$

$$a_{\text{opt}}^2 + 4la_{\text{opt}} - 4l^2 = 0 \tag{40}$$

$$a_{\text{opt},1/2} = 2l(-1 \pm \sqrt{2}) \tag{41}$$

Wegen $a \overset{!}{\geq} 0$ ergibt sich als optimales Maß a (mit dem kleinsten maximalen Biegemoment):

$$\boxed{a_{\text{opt}} = 2(\sqrt{2} - 1)\ l} \approx 0{,}8284\ l\ . \tag{42}$$

Aufgabe 68

(a) Das Tragwerk ist statisch bestimmt gelagert.

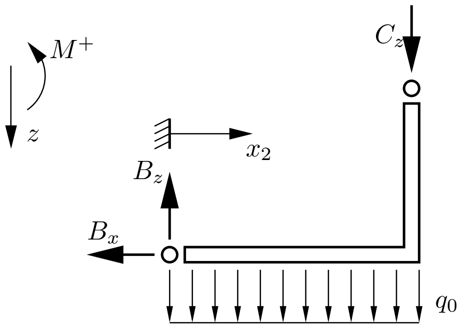
Die notwendige Bedingung für ein System starrer Körper in der Ebene

$$3n = r + v \tag{43}$$

ist erfüllt: Die Anzahl der starren Körper n ist gleich 2. Die feste Einspannung links stellt ein dreiwertiges Lager dar, das Loslager oben ist einwertig ($r = 4$). Das Gelenk in der Mitte ist zweiwertig ($v = 2$).

Hinreichend für die statische Bestimmtheit ist, dass Einbaufehler nicht zu Verspannungen führen und dass kein Teil in irgendeiner Form beweglich ist.

(b) Freischnitt des rechten Teilkörpers:



Die Linienlast q_0 kann ersetzt werden durch eine Einzelkraft $F_{q,\text{res}} = q_0 a$, die in der Mitte ($x_2 = \frac{a}{2}$) angreift.

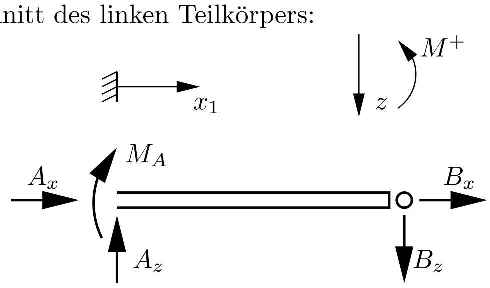
$$\sum F_x = 0 = -B_x \qquad \Rightarrow B_x = 0 \tag{44}$$

$$\sum F_z = 0 = B_z - q_0 a - C_z \qquad \Rightarrow B_z = C_z + q_0 a \tag{45}$$

$$\sum M^{(B)} = 0 = -aC_z - \frac{a}{2} q_0 a \qquad \Rightarrow C_z = -\frac{1}{2} q_0 a \tag{46}$$

$$\Rightarrow B_z = \frac{1}{2} q_0 a \tag{47}$$

Freischnitt des linken Teilkörpers:



$$\sum F_x = 0 = A_x + B_x \qquad \Rightarrow A_x = 0 \tag{48}$$

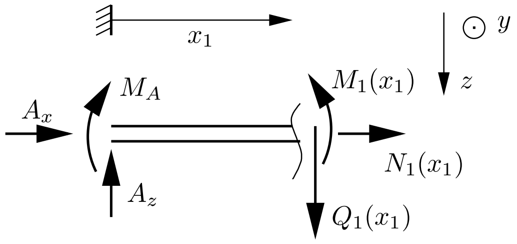
$$\sum F_z = 0 = -A_z + B_z \qquad \Rightarrow A_z = B_z = \frac{1}{2} q_0 a \tag{49}$$

$$\sum M^{(A)} = 0 = -M_A - aB_z \qquad \Rightarrow M_A = -\frac{1}{2} q_0 a^2 \tag{50}$$

<u>Hinweis:</u> $M^{(A)}$ bezeichnet Momente (z.B. der verschiedenen auf den Balken wirkenden Kräfte) mit dem Bezugspunkt A. M_A bezeichnet dagegen das Moment, das von der Einspannung im Punkt A auf den Balken wirkt.

(c) <u>Schnittlasten zwischen A und B:</u>
Ortskoordinate $x_1 \in (0, a)$

Freischnitt durch den Balken an der (im folgenden festgehaltenen) Koordinate x_1:



$$\sum F_x = 0 = A_x + N_1(x_1) \quad \Rightarrow N_1(x_1) = 0 \tag{51}$$

$$\sum F_z = 0 = -A_z + Q_1(x_1) \quad \Rightarrow Q_1(x_1) = \frac{1}{2} q_0 a \tag{52}$$

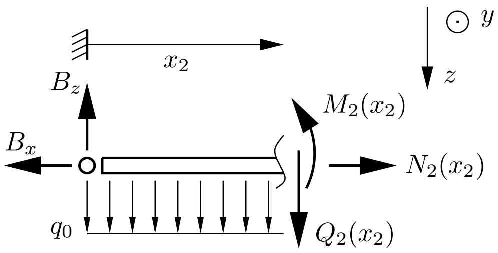
$$\sum M^{(S_1)} = 0 = M_1(x_1) - M_A - x_1 A_z \tag{53}$$

$$\Rightarrow M_1(x_1) = \frac{1}{2} q_0 a^2 \Big(\frac{x_1}{a} - 1 \Big) \tag{54}$$

Hinweis: $M^{(S_1)}$ steht für Momente um den Schnittpunkt S_1 (Ortskoordinate x_1).

Schnittlasten zwischen B und dem Winkel zw. B u. C:
Ortskoordinate $x_2 \in (0, a)$

Freischnitt durch den Balken an der (im folgenden festgehaltenen) Koordinate x_2:



$$\sum F_x = 0 = -B_x + N_2(x_2) \quad \Rightarrow N_2(x_2) = 0 \tag{55}$$

$$\sum F_z = 0 = -B_z + Q_2(x_2) + q_0 x_2 \tag{56}$$

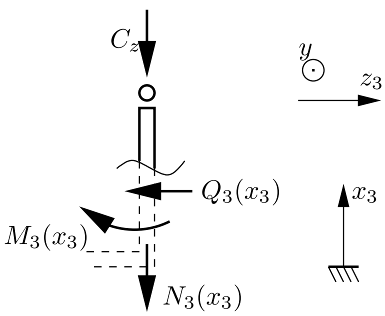
$$\Rightarrow Q_2(x_2) = q_0 \Big(\frac{a}{2} - x_2 \Big) \tag{57}$$

$$\sum M^{(S_2)} = 0 = M_2(x_2) + \frac{x_2}{2} q_0 x_2 - x_2 B_z \tag{58}$$

$$\Rightarrow M_2(x_2) = \frac{1}{2} q_0 a^2 \left(\frac{x_2}{a} - \Big(\frac{x_2}{a}\Big)^2 \right) \tag{59}$$

Schnittlasten zwischen C und dem Winkel zw. B u. C:
Ortskoordinate $x_3 \in (0, a)$

Freischnitt durch den Balken an der (im folgenden festgehaltenen) Koordinate x_3:



$$\sum F_x = 0 = -C_z - N_3(x_3) \quad \Rightarrow N_3(x_3) = \frac{1}{2} q_0 a \tag{60}$$

$$\sum F_z = 0 = -Q_3(x_3) \quad \Rightarrow Q_3(x_3) = 0 \tag{61}$$

$$\sum M^{(S_3)} = 0 = M_3(x_3) \quad \Rightarrow M_3(x_3) = 0 \tag{62}$$

Grafische Darstellung:
In den linken Diagrammen werden jeweils die ersten beiden Bereiche mit einer x-Koordinate zusammengefaßt: $x_1 = x$, $x_2 = x - a$.