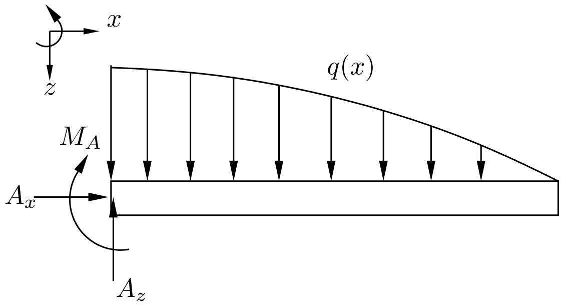
Tutorium

Aufgabe 32



<u>Kosinusfuktion</u> Eine allgemeine Form der Kosinusform lautet:

$$q(x) = Q\cos(kx) \tag{1}$$

Anpassen der Kosinusfunktion an die Randbedingungen ist erforderlich!

$$q(x=0) = q_0 \quad \Rightarrow \quad Q\cos(0) = q_0 \quad \Rightarrow \quad Q = q_0 \tag{2}$$
$$q(x=l) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(kl) = 0 \tag{3}$$

Der Kosinus ist Null bei $kl = \frac{\pi}{2}$. Die angepasste Kosinusfunktion lautet dann:

$$q(x) = q_0 \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{l}\right) \tag{4}$$

<u>Kräftegleichgewichte</u>
in x-Richtung:

$$\sum_i F_{i,x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{A_x = 0}} \tag{5}$$

in z-Richtung:

$$\sum_i F_{i,z} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_z = \int_0^l q(x)\mathrm{d}x \tag{6}$$

$$A_z = \int_0^l q(x)\mathrm{d}x \tag{7}$$
$$= \int_{x=0}^l q_0 \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{l}\right)\mathrm{d}x \tag{8}$$
$$\text{jetzt Substitution } z = \frac{\pi}{2l}x \tag{9}$$
$$\text{und } \mathrm{d}x = \frac{2l}{\pi}\mathrm{d}z \tag{10}$$
$$= q_0\frac{2l}{\pi}\int_{z=0}^{\frac{1}{2}\pi}\cos z\mathrm{d}z \tag{11}$$
$$= q_0\frac{2l}{\pi}\left[\sin z\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} \tag{12}$$
$$= q_0\frac{2l}{\pi}(1-0) \tag{13}$$
$$= q_0\frac{2l}{\pi} \tag{14}$$
$$\Rightarrow \quad A_z = \underline{\underline{\frac{2q_0 l}{\pi}}} \tag{15}$$

<u>Momentengleichgewicht</u>

$$\sum M^{(\mathrm{A})} = 0 = -M_A - \int_0^l xq(x)\,\mathrm{d}x \tag{16}$$

$$\Rightarrow M_A = -\int_0^l xq_0\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{l}\right)\mathrm{d}x \tag{17}$$

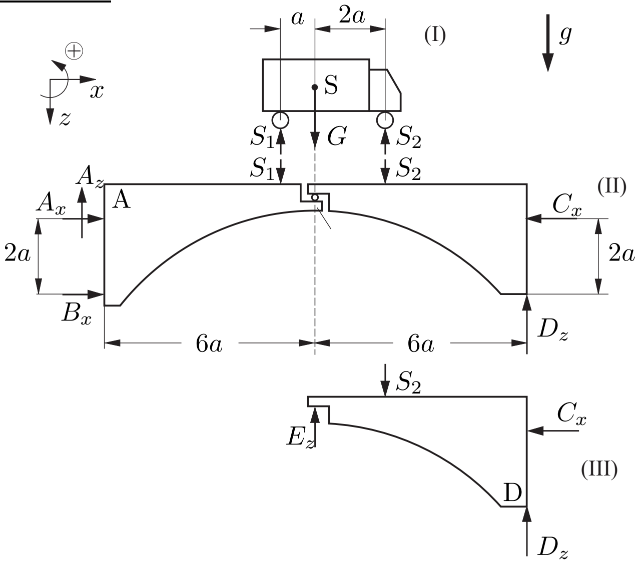
nach Bronstein $\int x\cos ax\mathrm{d}x = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x\sin ax}{a}$
oder partielle Integration:
$\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\mathrm{d}x$

$$u'(x) = q_0\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{l}\right) \tag{18}$$
$$v(x) = x \tag{19}$$
$$u(x) = \frac{2q_0 l}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{l}\right) \tag{20}$$
$$v'(x) = 1 \tag{21}$$

$$M_A = -q_0\left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{l}\right)}{\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2} + \frac{x\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{l}\right)}{\frac{\pi}{2l}}\right]_0^l \tag{22}$$
$$M_A = \underline{\underline{\frac{2q_0 l^2}{\pi}\left[\frac{2}{\pi} - 1\right]}} \tag{23}$$

Aufgabe 35

Freischnitt



Für Teilkörper (I) liegen 2 GGB für 2 Unbekannte vor. (Horizontales Kräftegleichgewicht macht keine Aussage über S_1 oder S_2). Gesammtkörper (II) und Teilkörper (III) liefern 6 GGB für die 6 Unbekannten: A_x, A_z, B_x, C_x, D_z, E_z

(I)

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow S_1 + S_2 = G \tag{24}$$

$$\sum M^{(\mathrm{S})} = 0 \Rightarrow S_2 \cdot 2a = S_1 \cdot a \Rightarrow S_1 = 2S_2 \tag{25}$$

$$(25) \text{ in } (24) \Rightarrow S_2 = \frac{1}{3} G \text{ und } S_1 = \frac{2}{3} G \tag{26}$$

(III)

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow C_x = 0 \tag{27}$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow E_z - S_2 + D_z = 0 \tag{28}$$

$$\sum M^{(\mathrm{D})} = 0 \Rightarrow -E_z \cdot 6a + C_x \cdot 2a + S_2 \cdot 4a = 0 \tag{29}$$

$$(27) \text{ in } (29) \Rightarrow E_z = \frac{2}{3} S_2 = \frac{2}{9} G \tag{30}$$

$$(30) \text{ in } (28) \Rightarrow D_z = S_2 - \frac{2}{9} G = \frac{1}{9} G \tag{31}$$

(II)

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + B_x - C_x = 0 \tag{32}$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow S_1 + S_2 - A_z - D_z = 0 \tag{33}$$

$$\text{mit } (31) \Rightarrow A_z = \frac{8}{9} G \tag{34}$$

$$\sum M^{(\mathrm{A})} = 0$$

$$\Rightarrow 2a\, B_x - 5a\, S_1 - 8a\, S_2 + 12a\, D_z = 0 \tag{35}$$

$$B_x = \frac{1}{2}\left(\frac{10}{3} + \frac{8}{3} - \frac{4}{3}\right) G = \frac{7}{3} G \tag{36}$$

$$(27) \text{ und } (36) \text{ in } (32) \Rightarrow A_x = -\frac{7}{3} G \tag{37}$$

mit der Vorgabe von $G = 90\,\mathrm{kN}$ ergeben sich:

$$C_x = 0\,\mathrm{kN} \tag{38}$$

$$E_z = 20\,\mathrm{kN} \tag{39}$$

$$D_z = 10\,\mathrm{kN} \tag{40}$$

$$B_x = 210\,\mathrm{kN} \tag{41}$$

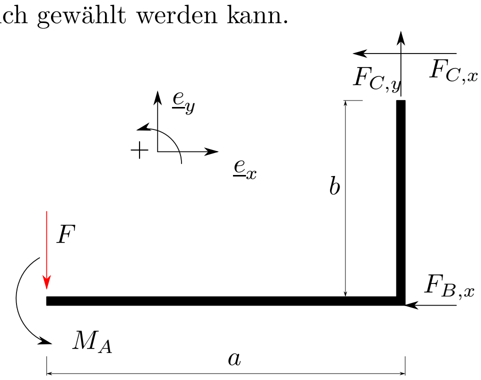
$$A_x = -210\,\mathrm{kN} \tag{42}$$

$$A_z = 80\,\mathrm{kN} \tag{43}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 20

(a) Das Lager in A kann lediglich eine Drehung verhindern und nimmt damit nur ein Moment M_A auf. Das Loslager in B überträgt nur eine Kraft in horizontaler Richtung $F_{B,x}$ und das Festlager in C lässt keine Translation, aber eine Rotation zu. Damit nimmt es ein Kräftepaar, hier $F_{C,x}$ und $F_{C,y}$, auf. Nach dieser Vorüberlegung ergibt sich der dargestellte Freischnitt mit den vier unbekannten Lagerlasten, wobei der Richtungssinn dieser Lagerlasten willkürlich gewählt werden kann.



Kräftegleichgewicht $\sum \underline{F} \overset{!}{=} \underline{0}$

$$\sum_i F_{i,x} = -F_{C,x} - F_{B,x} \overset{!}{=} 0 \tag{44}$$

$$\sum_i F_{i,y} = F_{C,y} - F \overset{!}{=} 0 \tag{45}$$

Momentengleichgewicht $\sum \underline{M}^{(B)} \overset{!}{=} \underline{0}$ bezüglich B

$$\sum_j M_j^{(\mathrm{B})} = F_{C,x} b + Fa + M_A \overset{!}{=} 0 \tag{46}$$

Dieses Gleichungssystem aus drei Gleichungen und vier Unbekannten ist unterbestimmt - es lassen sich nicht alle Unbekannten ermitteln. Auch ein zusätzliches Momentengleichgewicht, z.B. um den Punkt C, liefert keine neue Information.

Momentengleichgewicht $\sum \underline{M}^{(C)} \overset{!}{=} \underline{0}$ bezüglich C

$$\sum_j M_j^{(\mathrm{C})} = -F_{B,x} b + Fa + M_A \overset{!}{=} 0 \tag{47}$$

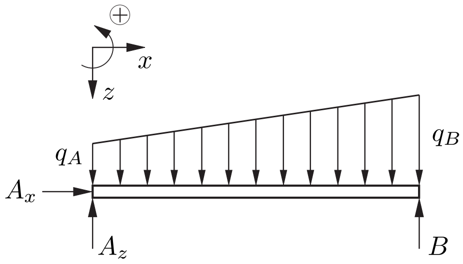
Diese vier Gleichungen sind linear abhängig. Die Gleichungen (44) und (46) führen direkt auf die Gleichung (47).

(b) Das Beispiel illustriert, dass bei ebenen Problemen die Gleichgewichtsbedingungen für jeden starren Körper nur drei Gleichungen liefern. Daher reichen in den Fällen, wo mehr als drei Lagerreaktionen zu berechnen sind, die Gleichgewichtsbedingungen nicht aus. Man nennt solche Systeme statisch unbestimmte Systeme.

Im weiteren Verlauf des Semesters werden wir eine Lösung für dieses Problem finden. Es zeigt sich, dass bei Berücksichtigung der Verformungen auch bei statisch unbestimmten Systemen eine Berechnung der Lagerreaktionen möglich ist.

Aufgabe 31

Freischnitt



Kräftegleichgewicht

In x - Richtung

$$\sum F_x = 0 = A_x \Rightarrow A_x = 0 \tag{48}$$

In y - Richtung

$$\sum F_z = 0 = -A_z - B + \int_{x=0}^{l} q(x)\mathrm{d}x \tag{49}$$

$$\Rightarrow A_z = \left(\int_0^l q(x)\mathrm{d}x\right) - B \tag{50}$$

Momentengleichgewicht um das Lager A

$$\sum M^{(A)} = 0 = -\int_0^l xq(x)\mathrm{d}x + Bl \tag{51}$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{l}\int_0^l xq(x)\mathrm{d}x \tag{52}$$

Ermittlung von $q(x)$

$q(x)$ ist linear, also $q(x) = ax + b$

$$\begin{cases} q(0) = q_A \\ q(l) = q_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = q_A \\ al + b = q_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = q_A \\ a = \dfrac{q_B - q_A}{l} \end{cases}$$

$$q(x) = \left(\frac{q_B - q_A}{l}\right)x + q_A \tag{53}$$

$$B = \frac{1}{l}\int_0^l \left[\left(\frac{q_B - q_A}{l}\right)x + q_A\right]x\,\mathrm{d}x \tag{54}$$

$$= \frac{1}{l}\left[\left(\frac{q_B - q_A}{l}\right)\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}q_A x^2\right]_0^l \tag{55}$$

$$= \frac{1}{l}\left[\left(\frac{q_B - q_A}{l}\right)\frac{l^3}{3} + \frac{1}{2}q_A l^2\right]_0^l \tag{56}$$

$$= \frac{q_B - q_A}{3}l + \frac{q_A l}{2} \tag{57}$$

$$\boxed{B = \left(\frac{1}{3}q_B + \frac{1}{6}q_A\right)\cdot l}$$

$$A_z = \int_0^l q(x)\mathrm{d}x - B \tag{58}$$

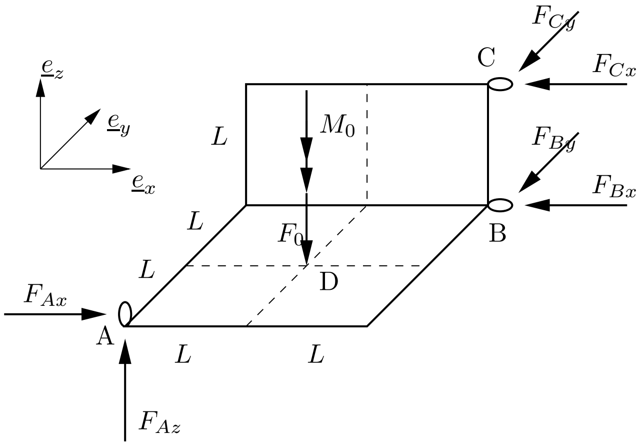
$$= \left[\left(\frac{q_B - q_A}{l}\right)\frac{x^2}{2} + q_A x\right]_0^l - B \tag{59}$$

$$= \frac{1}{2}\Big(q_B - q_A\Big)l + q_A \cdot l - \frac{1}{3}q_B l - \frac{1}{6}q_A l \tag{60}$$

$$\boxed{A_z = \left(\frac{1}{6}q_B + \frac{1}{3}q_A\right)\cdot l}$$

Aufgabe 44

Freischnitt:



Kräftegleichgewicht:

$$\sum \underline{F} = \underline{0} \tag{61}$$

$$F_{Ax}\underline{e}_x + F_{Az}\underline{e}_z - F_0\underline{e}_z ...$$
$$... - F_{Bx}\underline{e}_x - F_{By}\underline{e}_y - F_{Cx}\underline{e}_x - F_{Cy}\underline{e}_y = \vec{0} \tag{62}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{Ax} - F_{Bx} - F_{Cx} = 0 \\ -F_{By} - F_{Cy} = 0 \\ F_{Az} - F_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{Az} = F_0}$$

Momentengleichgewicht um den Punkt A:

$$\sum \underline{M}^{(A)} = 0 \tag{63}$$

$$-M_0\underline{e}_z + (L\underline{e}_x + L\underline{e}_y) \times (-F_0)\underline{e}_z$$
$$+(2L\underline{e}_x + 2L\underline{e}_y) \times (-F_{Bx}\underline{e}_x - F_{By}\underline{e}_y)$$
$$+(2L\underline{e}_x + 2L\underline{e}_y + L\underline{e}_z) \times (-F_{Cx}\underline{e}_x - F_{Cy}\underline{e}_y) = 0 \tag{64}$$

$$-M_0\underline{e}_z + F_0L\underline{e}_y - F_0L\underline{e}_x - 2F_{By}L\underline{e}_z + 2F_{Bx}L\underline{e}_z$$
$$+2F_{Cx}L\underline{e}_z - F_{Cx}L\underline{e}_y - 2F_{Cy}L\underline{e}_z + F_{Cy}L\underline{e}_x = 0 \tag{65}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -F_0L + F_{Cy}L = 0 \\ F_0L - F_{Cx}L = 0 \\ -M_0 - 2F_{By}L + 2F_{Bx}L + 2F_{Cx}L - 2F_{Cy}L = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} F_{Cy} = F_0 & F_{By} = -F_0 \\ F_{Cx} = F_0 & \\ F_{Bx} = \dfrac{M_0}{2L} - F_0 & \\ F_{Ax} = \dfrac{M_0}{2L} & \end{array}}$$