Tutorium

Aufgabe 13

(a) Ortsvektoren

$$\underline{r}_{BA} = -a\underline{e}_x$$
$$\underline{r}_{CA} = b\underline{e}_x$$
$$\underline{r}_{DA} = (a+b)\,\underline{e}_x$$

(b) Kräfte

$$\underline{F}_1 = -F_1\underline{e}_y$$
$$\underline{F}_2 = -F_2\underline{e}_y$$
$$\underline{F} = -F\cos\alpha\underline{e}_x + F\sin\alpha\underline{e}_y$$

(c) Kraftmomente der drei eingeprägten Kräfte bezüglich des Punktes A

$$\underline{M}_1 = \underline{r}_{BA} \times \underline{F}_1 = aF_1\underline{e}_z$$
$$\underline{M}_2 = \underline{r}_{DA} \times \underline{F}_2 = -(a+b)\,F_2\underline{e}_z$$
$$\underline{M} = \underline{r}_{CA} \times \underline{F} = bF\sin\alpha\underline{e}_z$$

Hinweis Bei ebenen Problemen muß bei der Berechnung der Momente nicht unbedingt die Vektorrechnung (Kreuzprodukt) angewendet werden. Allerdings muß bei der Berechnung gemäß der eingängigen Formel *Moment ist gleich Kraft mal Hebelarm* bedacht werden, daß der Hebelarm der Abstand zwischen dem Bezugspunkt und der Wirkungslinie der Kraft ist. Bei den Vorzeichen ist zudem der Drehsinn zu berücksichtigen.

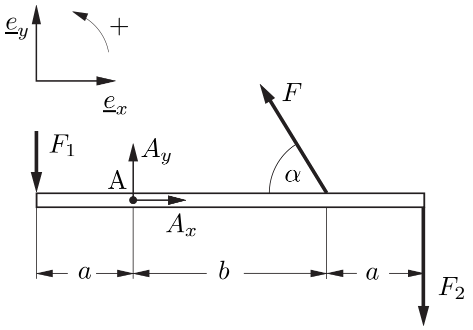
(d) Das resultierende Moment bezüglich des Lagerungspunktes A soll Null sein:

$$\underline{0} = \sum \underline{M}^{(A)} = \underline{M}_1 + \underline{M}_2 + \underline{M} \quad .$$

Daraus folgt unmittelbar

$$F = \frac{(a+b)\,F_2 - aF_1}{b\sin\alpha} = 4{,}5\,\mathrm{kN}$$

(e) Damit der Hebel in Ruhe ist, müssen die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sein. Das Kräftegleichgewicht $\sum \underline{F} = \underline{0}$ liefert zwei Gleichungen für die zwei unbekannten Komponenten der Lagerkraft.



Aufgabe 14

vektoriell

Kraft

$$\underline{F} = F_x\underline{e}_x + F_y\underline{e}_y = F\cos\alpha\underline{e}_x + F\sin\alpha\underline{e}_y \tag{1}$$

mit

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{und} \quad \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \tag{2}$$

Vektor von B (Bezugspunkt) nach A (Kraftangriffspunkt)

$$\overrightarrow{BA} = \underline{r}_{AB} = -7a\underline{e}_x - 4a\underline{e}_y \tag{3}$$

Moment mittels Kreuzprodukt

$$\underline{M} = \overrightarrow{BA} \times \underline{F} \tag{4}$$
$$= (4\cos\alpha - 7\sin\alpha)aF\underline{e}_z = -2\sqrt{5}aF\underline{e}_z \tag{5}$$

Beachte: Kreuzprodukt ist nicht kommutativ.

skalar

Hebelarm (Abstand zwischen Wirkungslinie der Kraft und dem Bezugspunkt B)

$$h = 2\sqrt{5}a \tag{6}$$

Moment (negativer Drehsinn; beachte z-Achse)

$$M = -hF = -2\sqrt{5}aF \tag{7}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 12

(a) Ortsvektoren

$$\underline{r}_{DA} = 2R\underline{e}_x + R\underline{e}_y$$
$$\underline{r}_{CA} = 2R\underline{e}_x + 3R\underline{e}_y$$
$$\underline{r}_{BA} = 3R\underline{e}_y$$

(b) vektorielle Darstellung der äußeren Kraft

$$\underline{F} = F\underline{e}_z$$

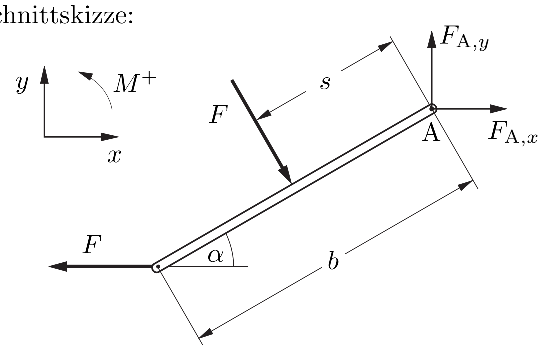
(c) Kreuzprodukt

$$\underline{r}_{DA} \times \underline{F} = \left(2R\underline{e}_x + R\underline{e}_y\right) \times F\underline{e}_z$$
$$= RF\left(-2\underline{e}_y + \underline{e}_x\right)$$

Diese physikalische Größe ist das (Kraft-)Moment der Kraft $\underline{F}$ bezüglich des Punktes A.

Aufgabe 15

Freischnittskizze:



Das aus der Kräftegruppe resultierende Moment bezüglich A erhält man aus der Summe der Einzelmomente, wobei M^+ den positiven Drehsinn angibt.

$$\sum M^{(A)} = F\,s - F\sin(\alpha)\,b \tag{8}$$

Der Hebelarm s soll nun so gewählt werden, dass das resultierende Moment bezüglich A verschwindet.

$$\sum M^{(A)} = F\,s - F\sin(\alpha)\,b = 0 \tag{9}$$

Die Gleichung kann nun leicht nach s umgestellt werden.

$$s = b\,\sin(\alpha) \tag{10}$$

Wie aus der Gleichung ersichtlich ist, hat die Größe der Kräfte F keinen Einfluß auf den zu bestimmenden Abstand s.

$$s = \sin(30°)\,1\text{m} = 0{,}5\text{m} \tag{11}$$

Die Lagerreaktionen $F_{A,x}$ und $F_{A,y}$ folgen aus den Kräftegleichgewichten:

$$\sum_i F_{i,x} = F_{A,x} - F + F\sin(\alpha) \stackrel{!}{=} 0 \tag{12}$$

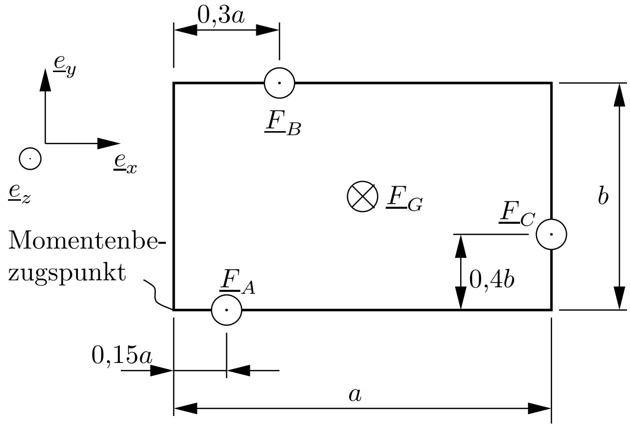
$$\Rightarrow F_{A,x} = F\left(1 - \sin(\alpha)\right) = \frac{F}{2} \tag{13}$$

$$\sum_i F_{i,y} = F_{A,y} - F\cos(\alpha) \stackrel{!}{=} 0 \tag{14}$$

$$\Rightarrow F_{A,y} = F\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}F}{2} \tag{15}$$

Aufgabe 19

Die Platte von oben gesehen mit Vektorbasis und einwirkenden Kräften ($a = 2{,}4$m, $b = 1{,}2$m):



Die Gewichtskraft der Platte beträgt

$$\underline{F}_G = -mg\underline{e}_z = -50\text{kg}\;9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\underline{e}_z = -490{,}5\text{N}\underline{e}_z \tag{16}$$

Gesucht sind die Beträge der drei Kräfte $\underline{F}_A = F_A\underline{e}_z$, $\underline{F}_B = F_B\underline{e}_z$, $\underline{F}_C = F_C\underline{e}_z$.

Um die drei Unbekannten F_A, F_B, F_C zu bestimmen, werden drei Gleichungen benötigt: Das Kräftegleichgewicht (das ist in diesem Fall nur eine Gleichung)

$$\sum \underline{F} = \underline{F}_G + \underline{F}_A + \underline{F}_B + \underline{F}_C = \underline{0} \tag{17}$$
$$\left(-mg + F_A + F_B + F_C\right)\underline{e}_z = \underline{0}$$
$$F_A + F_B + F_C = mg\;, \tag{18}$$

und das Momentengleichgewicht um einen willkürlich festgelegten Punkt (das sind -wie man gleich sieht- zwei Gleichungen). Als Bezugspunkt wird die -in der Skizze- linke untere Ecke der Platte gewählt:

$$\sum \underline{M} = \underline{0} \tag{19}$$

$$\underline{r}_G \times \underline{F}_G + \underline{r}_A \times \underline{F}_A + \underline{r}_B \times \underline{F}_B + \underline{r}_C \times \underline{F}_C = \underline{0} \tag{20}$$

Die Verschiebungsvektoren zwischen dem Momentenbezugspunkt und den Kraftangriffspunkten lauten:

$$\underline{r}_A = 0{,}15\,a\,\underline{e}_x \qquad \underline{r}_B = 0{,}3\,a\,\underline{e}_x + b\,\underline{e}_y$$
$$\underline{r}_C = a\,\underline{e}_x + 0{,}4\,b\,\underline{e}_y \qquad \underline{r}_G = 0{,}5\,a\,\underline{e}_x + 0{,}5\,b\,\underline{e}_y$$

$$\left(-0{,}15F_A - 0{,}3F_B - F_C + 0{,}5\,mg\right)a\,\underline{e}_y$$
$$+\left(F_B + 0{,}4F_C - 0{,}5\,mg\right)b\,\underline{e}_x = \underline{0} \tag{21}$$

$$0{,}15F_A + 0{,}3F_B + F_C = 0{,}5\,mg \tag{22}$$
$$F_B + 0{,}4F_C = 0{,}5\,mg \tag{23}$$

Das Gleichungssystem aus den Gleichungen (18), (22) und (23) hat folgende Lösung:

$$F_A = \frac{23}{79}mg \approx 142{,}804\text{N}$$
$$F_B = \frac{57}{158}mg \approx 176{,}953\text{N}$$
$$F_C = \frac{55}{158}mg \approx 170{,}744\text{N}$$