Allgemeines

Bis zur ersten Klausur werden wir uns mit der Statik starrer Körper beschäftigen. Danach steht die Elastostatik auf dem Programm.

In den ersten Wochen werden wir die Vektorrechnung auffrischen und uns wichtige Grundbegriffe der Mechanik (Kraft, Moment, Schwerpunkt, Freikörperbild, Gleichgewicht, ...) aneignen.

Wozu ist das Gelernte gut? Der sichere Umgang mit Vektoren und das Kennen der Grundbegriffe sind wesentliche Voraussetzung für ein erfolgreiches Lösen vieler technischer Probleme. Auch wenn man den Mechanikaufgaben aus den Übungen und Hausaufgaben den praktischen Hintergrund häufig nicht ansieht, so erlauben die im Laufe dieses Semesters erworbenen Kenntnisse und Fähigkeiten die Lösung einer Vielzahl von praktischen Aufgaben. Viele Studenten hören parallel Konstruktionslehre oder Maschinenelemente und können dort das Gelernte bereits anwenden.

Tutorium

Aufgabe 1

Funtionen*dummy* einer linearen Funktion:

$$\underline{f(x) = mx + n.} \tag{1}$$

Dabei entspricht m der Steigung der Geraden $f(x)$ und n einer Verschiebungskonstante. Damit sind also zwei unbekannte Größen (m, n) zu ermitteln. Dies erfolgt durch Anpassen an gegeben Werte (meist Randwerte):

$$f_1(x=0) = m\cdot 0 + n = n \stackrel{!}{=} q_0 \qquad \Rightarrow n = q_0 \tag{2}$$

$$f_1(x=a) = m\cdot a + n = ma + n \stackrel{!}{=} q_1 \tag{3}$$

$$\Rightarrow m = \underbrace{\frac{q_1 - q_0}{a}}_{\text{mit } q_1<q_0 \Rightarrow \text{negative Steigung}} \tag{4}$$

Damit ist also:

$$f_1(x) = \frac{q_1 - q_0}{a}x + q_0 \tag{5}$$

Funtionen*dummy* einer quadratischen Funktion:

$$\underline{f(x) = px^2 + qx + r.} \tag{6}$$

Es sind also drei Faktoren (p, q, r) unbestimmt.

Bei $x = 0$ findet man:

$$f_2(x=0) = p\cdot 0^2 + q\cdot 0 + r \stackrel{!}{=} q_1 \qquad \Rightarrow r = q_1 \tag{7}$$

Keine Steigung bei $x = a/2$

$$f_2'(x=a/2) := \frac{\mathrm{d}f_2(x)}{\mathrm{d}x}|_{x=a/2} = (2px+q)|_{x=a/2} \tag{8}$$

$$= 2p\frac{a}{2} + q \stackrel{!}{=} 0 \tag{9}$$

$$\Rightarrow q = -pa \tag{10}$$

$$f_2(x=a/2) = p\left(\frac{a}{2}\right)^2 + q\frac{a}{2} + r = pa^2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + q_1 \stackrel{!}{=} q_0 \tag{11}$$

$$\Rightarrow p = -4\frac{q_0 - q_1}{a^2} \tag{12}$$

Man findet also:

$$f_2(x) = -4\frac{q_0 - q_1}{a^2}\left(x^2 - xa\right) + q_1 \tag{13}$$

Funtionen*dummy* einer Sinusfunktion:

$$\underline{f(x) = A\sin(\omega x + \phi) + B.} \tag{14}$$

B ist die Veschiebung parallel zur x-Achse und daher ist $B = q_1$.
A ist die Amplitude und damit gilt $A = q_0 - q_1$.
omega ist die Schwingfrequenz, Sie ergibt sich aus $T = \frac{2\pi}{\omega}$, wobei T die Periode der Funktion ist. Daher ist

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2a \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{a} \tag{15}$$

Schließlich ist ϕ die Phasenverschiebung. Es gilt

$$f(x_0) = A\sin(\omega x_0 + \phi) + B = B. \tag{16}$$

Daher muss gelten, dass $\omega x_0 + \phi = \pi$ ist. Für die dargestellte Funktion ist $x_0 = \frac{a}{2}$ und damit ergibt sich $\phi = \frac{\pi}{2}$. Die gesuchte Funktion ist damit

$$f_3(x) = (q_0 - q_1)\sin(\frac{\pi}{a}x + \frac{\pi}{2}) + q_1 \tag{17}$$

$$= (q_0 - q_1)\cos(\frac{\pi}{a}x) + q_1\,. \tag{18}$$

Aufgabe 3

(a) Kräfte in vektorieller Schreibweise

$$\underline{F}_1 = -F_1 \cos\alpha \underline{e}_x + F_1 \sin\alpha \underline{e}_y$$
$$\underline{F}_2 = F_2 \cos\beta \underline{e}_x + F_2 \sin\beta \underline{e}_y$$

(b) resultierende Kraft

$$\underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 = (-F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta)\, \underline{e}_x + (F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\beta)\, \underline{e}_y$$

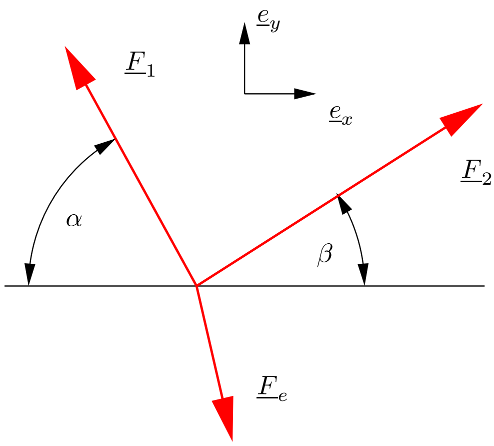
Betrag

$$F = |\underline{F}| = \sqrt{(-F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta)^2 + (F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\beta)^2}$$

Richtung (Winkel γ gegenüber der positiven x-Richtung)

$$\tan\gamma = \frac{F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\beta}{-F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta}$$

(c) Kraft an der Einspannstelle



$$\underline{F}_e = -\underline{F} = (F_1 \cos\alpha - F_2 \cos\beta)\, \underline{e}_x - (F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\beta)\, \underline{e}_y$$

(d) nur axiale Kraft in der Einspannung

$$F_1 \cos\alpha - F_2 \cos\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{F_2}{F_1} \cos\beta$$

Zahlenwerte: $\alpha \approx 46^o$.

Hausaufgaben

Aufgabe 2

	Präsens	Imperfekt
ich	leite ab	leitete ab
du	leitest ab	leitetest ab
er/sie/es	leitet ab	leitete ab
wir	leiten ab	leiteten ab
ihr	leitet ab	leitetet ab
sie	leiten ab	leiteten ab

	Konjunktiv I	Konjunktiv II
ich	leite ab	leitete ab
du	leitest ab	leitetest ab
er/sie/es	leite ab	leitete ab
wir	leiten ab	leiteten ab
ihr	leitet ab	leitetet ab
sie	leiten ab	leiteten ab

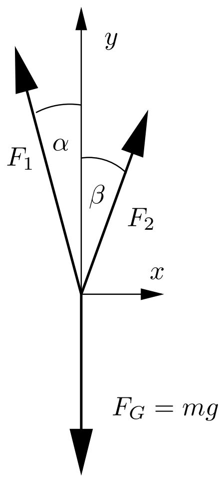
Hilfsverb: haben

Partizip II: abgeleitet

Aufgabe 5

(a) Da die Kiste in Ruhe ist, muss Kräftegleichgewicht herrschen, d.h. die (vektorielle) Summe aller Kräfte muss Null sein.

$$\underline{0} = -F_1 \sin\alpha \underline{e}_x + F_1 \cos\alpha \underline{e}_y + F_2 \sin\beta \underline{e}_x + F_2 \cos\beta \underline{e}_y - F_G \underline{e}_y$$



Für den Gleichgewichtszustand müssen also die beiden skalaren Gleichungen

$$0 = -F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\beta \tag{19}$$
$$0 = F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta - F_G \tag{20}$$

gelten. Anschaulich kann man auch so argumentieren: die resultierende Kraft F_{res} der beiden Kräfte F_1 und F_2 muss genau senkrecht wirken, damit die Kiste ruhig hängt. Deshalb müssen sich die Kraftkomponenten in x-Richtung genau aufheben.

Man erhält

$$F_1 = F_2 \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \approx 6{,}607\,\text{kN} \quad . \tag{21}$$

(Zur Information: Der Betrag der resultierenden Kraft F_{res} ist (in diesem speziellen Fall) gleich der Summe der y-Komponenten $F_{1,y}$ und $F_{2,y}$ der Kräfte F_1 und F_2:

$$\begin{aligned} F_{\text{res}} &= \sqrt{F_{\text{res},x}^2 + F_{\text{res},y}^2} \\ &= F_{1,y} + F_{2,y} \\ &= F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta = F_2 \left(\sin\beta \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \cos\beta\right) \\ &= F_2(\sin\beta \cot\alpha + \cos\beta) \approx 11{,}081\,\text{kN}) \end{aligned}$$

(b) Aus (20) folgt für die Gewichtskraft

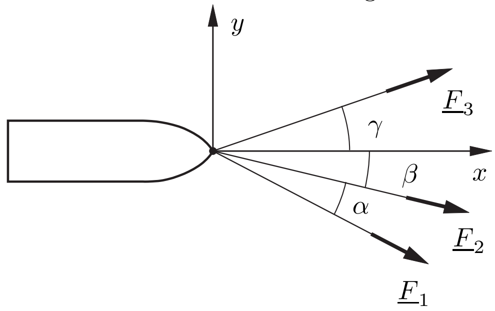
$$F_G = F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta \quad .$$

Daraus ergibt sich die Masse zu

$$m = \frac{F_G}{g} \approx 1130\,\text{kg} \quad .$$

Aufgabe 7

Der Vektor der resultierenden Zugkraft $\underline{F}_{res}$ ist gleich der Summe der Vektoren der einzelnen Zugkräfte.



$$\underline{F}_{res} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 \tag{22}$$

Die x- und y-Komponenten der Einzelkräfte berechnen sich wie folgt:

$$\begin{aligned} F_{1,x} &= F\cos(\alpha+\beta) & F_{1,y} &= -F\sin(\alpha+\beta) \\ F_{2,x} &= F\cos\beta & F_{2,y} &= -F\sin\beta \\ F_{3,x} &= F\cos\gamma & F_{3,y} &= F\sin\gamma \end{aligned}$$

Eingesetzt in Gleichung (22):

$$\begin{aligned} \underline{F}_{res} &= \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 \\ &= (F_{1,x} + F_{2,x} + F_{3,x})\underline{e}_x + (F_{1,y} + F_{2,y} + F_{3,y})\underline{e}_y \\ &= F\big(\cos(\alpha+\beta) + \cos\beta + \cos\gamma\big)\underline{e}_x \\ &\quad + F\big(-\sin(\alpha+\beta) - \sin\beta + \sin\gamma\big)\underline{e}_y \\ &\approx 56{,}616\text{kN}\ \underline{e}_x - 5{,}085\text{kN}\ \underline{e}_y \end{aligned}$$

Die resultierende Kraft aller drei Schlepper ist der Betrag dieses Vektors:

$$\begin{aligned} F_{res} &= |\underline{F}_{res}| = \sqrt{F_{res,x}^2 + F_{res,y}^2} \\ &\approx 56{,}844\text{kN} \end{aligned}$$

Der Winkel δ, den die resultierende Kraft F_{res} mit der x-Achse einschließt ergibt sich aus

$$\tan\delta = \frac{F_{res,y}}{F_{res,x}}$$
$$\delta = \arctan(\frac{F_{res,y}}{F_{res,x}}) \tag{23}$$
$$\approx -5,1^\circ \tag{24}$$
