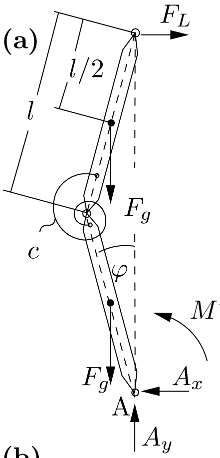
Tutorium

Aufgabe 134

(a)



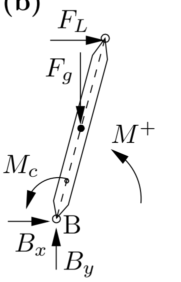
Momentengleichgewicht um das Lager A:

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum M_A \\
&= 2F_G\frac{l}{2}\sin\varphi - F_L 2l\cos\varphi \\
&\hookrightarrow F_L = \frac{1}{2}F_G\tan\varphi
\end{aligned}
$$

mit

$$F_G = mg$$

(b)

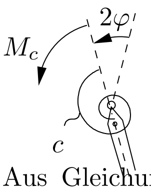


Momentengleichgewicht um das Lager B:

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum M_B \\
&= M_c - \frac{l}{2}\sin\varphi F_G - l\cos\varphi F_L \\
&= M_c - l\sin\varphi F_G \qquad (1)
\end{aligned}
$$

mit

$$M_c = c\cdot 2\varphi$$



ergibt sich aus Gln. (1):

$$0 = 2c\varphi - lmg\sin\varphi \qquad (2)$$

Aus Gleichung (2) können alle Gleichgewichtslagen bestimmt werden. Eine Lösung ist $\varphi_1 = 0$.

(c) In der Nähe der Gleichgewichtslage kann der nichtlineare Sinus-Term in Gleichung (2) linearisiert werden (Taylorreihenentwicklung):

$$\sin\varphi \approx \varphi\ ,$$

und aus Gleichung (2) wird:

$$0 = 2c\varphi - lmg\varphi = \varphi(2c - lmg)\ .$$

Die untersuchte Gleichgewichtslage stellt ein indifferentes Gleichgewicht dar, wenn (zumindest für kleine Auslenkungen) das Momentengleichgewicht für beliebige Winkel φ erhalten bleibt. Das ist genau dann der Fall, wenn

$$0 = 2c - lmg \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{2}lmg\ .$$

Das so bestimmte c ist die gesuchte kritische Federsteifigkeit. Eine größere Federsteifigkeit bewirkt, daß das Gleichgewicht bei $\varphi = 0$ stabil ist, eine kleinere das Gegenteil.

Aufgabe 136

(a) Es wird zuerst Variante 3 betrachtet. Die Varianten 1 und 2 sind Spezialfälle von 3.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung sowie ihre Ableitungen lauten:

$$w(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x + Cx + D \qquad (3)$$

mit $\lambda^2 = \frac{F}{EI}$.
Ableitungen:

$$
\begin{aligned}
w'(x) &= -\lambda A\sin\lambda x + \lambda B\cos\lambda x + C && (4)\\
w''(x) &= -\lambda^2 A\cos\lambda x - \lambda^2 B\sin\lambda x && (5)\\
w'''(x) &= \lambda^3 A\sin\lambda x - \lambda^3 B\cos\lambda x && (6)
\end{aligned}
$$

Die spezielle Lösung erhält man durch Anpassen der allgemeinen Lösung an die Randbedingungen. Am unteren Rand (Einspannung) gelten die beiden geometrischen Randbedingungen

$$
\begin{aligned}
w(0) &= 0 && (7)\\
w'(0) &= 0 && (8)
\end{aligned}
$$

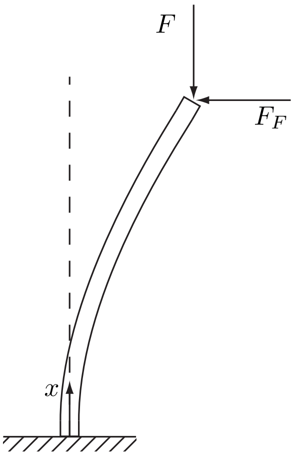
Mit Gleichung (3) und Gleichung (7):

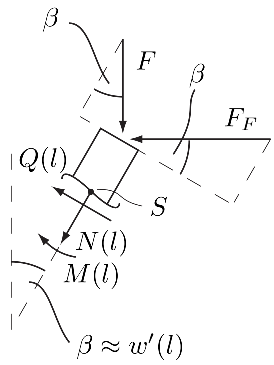
$$A + D = 0 \qquad (9)$$

Mit Gleichung (4) und Gleichung (8):

$$\lambda B + C = 0 \qquad (10)$$

Freischnitt bei $x = l$ am verformten System:





$$
\begin{aligned}
\sum M_S = 0 \quad &\Rightarrow \quad M(l) = 0 && (11)\\
& \qquad\ \ w''(l) = 0 && (12)
\end{aligned}
$$

Mit Gleichung (5) und Gleichung (12):

$$A\cos\lambda l + B\sin\lambda l = 0 \qquad (13)$$

$$
\begin{aligned}
&\sum Q(x) = 0 \\
\Rightarrow \quad & Q(l) + F_F\cos\beta - F\sin\beta = 0 \qquad (14)
\end{aligned}
$$

mit $F_F = cw(l)$

$$-EIw'''(l) + cw(l)\cos\beta - F\sin\beta = 0 \tag{15}$$

geometrische Linearisierung: $\cos\beta = 1$; $\sin\beta \approx \beta = w'(l)$

$$-EIw'''(l) + cw(l) - Fw'(l) = 0 \tag{16}$$

mit Gleichung (6), (4) und (3) folgt:

$$\begin{aligned}&- EI\lambda^3[A\sin\lambda l - B\cos\lambda l]\\ &+ c[A\cos\lambda l + B\sin\lambda l + Cl + D]\\ &- F\lambda[-A\sin\lambda l + B\cos\lambda l + \frac{C}{\lambda}] = 0\end{aligned} \tag{17}$$

Mit $F = EI\lambda^2$

$$\Rightarrow \quad c[\underbrace{A\cos\lambda l + B\sin\lambda l}_{=0 \text{ mit Gl. (13)}} + Cl + D] - EI\lambda^2 C = 0 \tag{18}$$

$$\Rightarrow \quad cCl + cD - EI\lambda^2 C = 0 \tag{19}$$

$$\Rightarrow \quad C\left(l - \frac{EI\lambda^2}{c}\right) + D = 0 \tag{20}$$

Weg 1:
Gleichungen (9), (10), (13) und (20) werden als lineares homogenes Gleichungssystem zusammengefasst. Es ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & \lambda & 1 & 0\\ \cos(\lambda l) & \sin(\lambda l) & 0 & 0\\ 0 & 0 & l - \frac{EI\lambda^2}{c} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\B\\C\\D\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \tag{21}$$

Damit nichttriviale Lösungen existieren, muss die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwinden:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & \lambda & 1 & 0\\ \cos(\lambda l) & \sin(\lambda l) & 0 & 0\\ 0 & 0 & l - \frac{EI\lambda^2}{c} & 1\end{pmatrix} \overset{!}{=} 0 \tag{22}$$

Diese Forderung ergibt nach kurzer Rechnung (per Hand oder mittels Mathematica o.ä.) die charakteristsche Gleichung:

$$\tan\lambda l = \lambda l\left(1 - \frac{(\lambda l)^2 EI}{cl^3}\right) \tag{23}$$

Für jede Lösung der charakteristischen Gleichung erhält man eine sog. Eigenform. Jede Eigenform (und die daraus resultierenden Schnittlasten) erfüllen alle 4 Randbedingungen und sind damit spezielle Lösungen der Differentialgleichung. Derjenige Wert F^*, der zum niedrigsten Eigenwert λ^* passt, heißt kritische Last.

Weg 2: Lösung per Handrechnung:
Bestimmung der Konstanten A, B, C, D: 4 Gleichungen (Gleichung (9), (10) (13) und (20)):
mit $F = EI\lambda^2$

$$\Rightarrow \quad D = C\left(\frac{EI\lambda^2}{c} - l\right) \tag{24}$$

(24) in (9)

$$\Rightarrow \quad A = -C\left(\frac{EI\lambda^2}{c} - l\right) \tag{25}$$

aus (10)

$$\Rightarrow \quad B = -\frac{C}{\lambda} \tag{26}$$

(25) und (26) in (13)

$$-C\left(\frac{EI\lambda^2}{c} - l\right)\cos\lambda l - \frac{C}{\lambda}\sin\lambda l = 0 \tag{27}$$

$$\Rightarrow C = 0 \text{ (triviale Lösung)} \tag{28}$$

oder

$$\tan\lambda l = -\lambda\left(\frac{EI}{cl^3} - l\right) \tag{29}$$

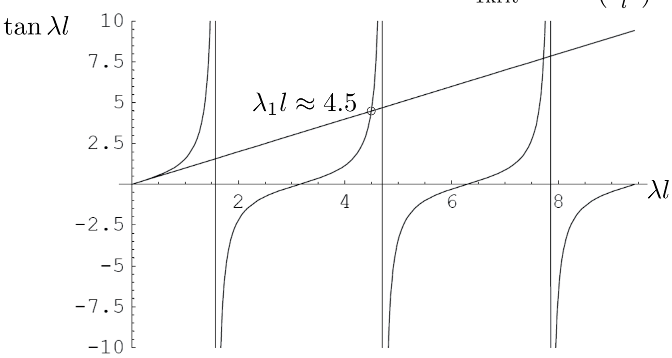
$$\tan\lambda l = \lambda l\left[1 - \frac{EI}{cl^3}(\lambda l)^2\right] \tag{30}$$

Eigenwertgleichung: Numerisch lösbar

Es gilt: $F_{1\text{krit}} = EI\lambda_1^2$

Fallunterscheidung:
Für $c \to \infty$ folgt Fall 1: $\underline{\tan\lambda = \lambda l}$.
Für $c \to 0$ folgt Fall 2: $\tan\lambda l \to -\infty$
$\hat{=} \underline{\cos\lambda l = 0}$
Fall 1:
Numerische beziehungsweise grafische Lösung:

$$\Rightarrow \quad F_{1\text{krit}} \approx EI\left(\tfrac{4{,}5}{l}\right)^2$$



Fall 2:

$$\cos\lambda l = 0 \tag{31}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_n l = (2n-1)\frac{\pi}{2} \tag{32}$$

$$\lambda_1 l = \frac{\pi}{2} \tag{33}$$

$$\Rightarrow \quad F_{1\text{ krit}} = EI\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \tag{34}$$

(b)

$$F_{\text{krit1}} = F_{\text{krit2}} \tag{35}$$

$$\lambda_{11}^2 = \lambda_{12}^2 \tag{36}$$

$$\lambda_{11} = \lambda_{12} \tag{37}$$

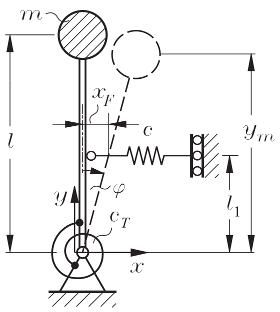
$$\Rightarrow \quad \frac{4{,}5}{l_1} \approx \frac{\pi}{2l_2} \tag{38}$$

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{9}{\pi} \approx 2{,}86 \tag{39}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 135

(a)



Statisches Momentengleichgewicht um den Fußpunkt des Pendels:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum M_{\text{äußere}} \\ &= M_{c_T} + F_c l_1 \cos\varphi \\ &\quad - mgl \sin\varphi \end{aligned}$$

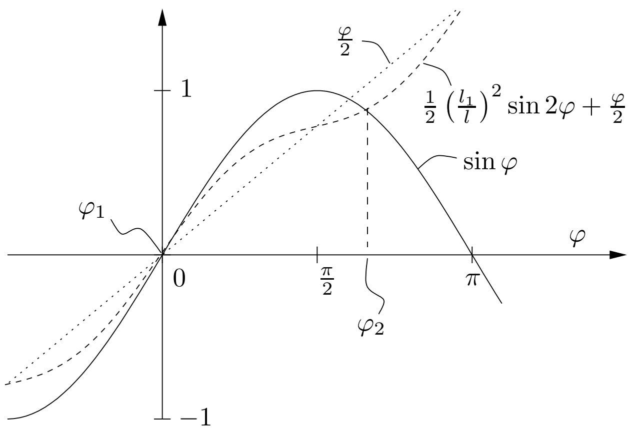
mit

$$M_{c_T} = c_T\varphi\,,\ F_c = c l_1 \sin\varphi$$

ergibt (mit $c_T = \frac{1}{2}mgl$, $c = \frac{mg}{l}$, $\sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi$):

$$\begin{aligned} 0 &= c_T\varphi + (c l_1^2 \cos\varphi - mgl)\sin\varphi \\ 0 &= \frac{1}{2}mgl\varphi + mgl\Big(\big(\frac{l_1}{l}\big)^2\cos\varphi - 1\Big)\sin\varphi \\ \sin\varphi &= \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}\big(\frac{l_1}{l}\big)^2 \sin 2\varphi \end{aligned} \tag{40}$$

Eine Lösung der Gleichung (40) ist $\varphi = 0$. Die anderen können z.B. grafisch gewonnen werden. Die Lösungen φ_1 und φ_2 kann man hier ablesen:



(b) Betrachtet werden soll die Stabilität der Gleichgewichtslage bei $\varphi = 0$. Untersucht wird, was kleine Störungen dieser Gleichgewichtslage bewirken. Für kleine Ausschläge $\varphi \approx \varphi_1 = 0$ kann Gleichung (40) linearisiert werden:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}\big(\frac{l_1}{l}\big)^2 2\varphi \\ \Big(\frac{1}{2} &- \big(\frac{l_1}{l}\big)^2\Big)\varphi = 0 \end{aligned}$$

Für beliebige φ (im Rahmen der Linearisierungsvoraussetzung) ergibt sich demnach Gleichgewicht wenn gilt:

$$\frac{1}{2} - \big(\frac{l_{1,\text{krit}}}{l}\big)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad l_{1,\text{krit}} = \frac{\sqrt{2}}{2} l \tag{41}$$

Das Gleichgewicht bei $\varphi = 0$ ist stabil, solange $l_1 > l_{1,\text{krit}}$ ist.

Aufgabe 140

Differentialgleichung für das Knickproblem:

$$w''''(x) + \lambda^2 w''(x) = 0 \quad \text{mit } \lambda^2 = \frac{F}{EI} \tag{42}$$

Allg. Lösung:

$$w(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x + C\lambda x + D \tag{43}$$

(a)

$$w(l) = 0 \qquad M(l) = 0 \tag{44}$$

$$\varphi(0) = 0 \qquad Q(0) = kw(0) \tag{45}$$

(b) Mit den Abkürzungen

$$c := \cos\lambda l\,, \quad s := \sin\lambda l \tag{46}$$

ergibt sich aus den Randbedingungen

$$\begin{bmatrix} c & s & \lambda l & 1 \\ c & s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ k & -EI\lambda^3 & 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{47}$$

Nichttriviale Lösung aus $\det M = 0$:

$$-k\sin(\lambda l) + (\lambda l k - EI\lambda^3)\cos(\lambda l) = 0 \tag{48}$$

(c) $k \to 0$:

$$\cos(\lambda l) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{\pi}{2l} \quad \Rightarrow \quad F_{\text{krit}} = \frac{\pi^2}{4}\frac{EI}{l^2} \tag{49}$$