Tutorium

Aufgabe 110

(a) Momentengleichgewicht:

$$M_D - 2 \cdot \frac{L}{2} F_D = 0 \quad \Rightarrow \quad F_D = \frac{M_D}{L} \tag{1}$$

(b) Verdrehung φ_M in der Mitte des Radkreuzes durch Torsion zwischen Mitte und Nuß (das Ding, das die Schraube oder Mutter aufnimmt) ergibt sich aus der Material-Strukturgleichung für den Torsionstab, das Torsionsmoment ist konstant, deshalb $\varphi' = \varphi_M/(L/2)$:

$$M_T = GI_P\varphi' \quad \Rightarrow \quad \varphi_M = \frac{M_T L}{2GI_P} = \frac{16 M_D L}{G\pi d^4} \tag{2}$$

Daraus würde ohne Verbiegung der Hebel zum Anfassen eine Absenkung der Kraftankriffspunkte resultieren um

$$w_T = \varphi_M \frac{L}{2} = \frac{8 M_D L^2}{G\pi d^4} \ . \tag{3}$$

Dazu kommt die Verbiegung der Hebel (Kragarm mit Einzellast am Ende) von

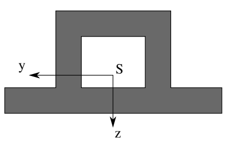
$$w_B = \frac{1}{3}\frac{F_D (L/2)^3}{EI} = \frac{8}{3}\frac{M_D L^2}{E\pi d^4} \tag{4}$$

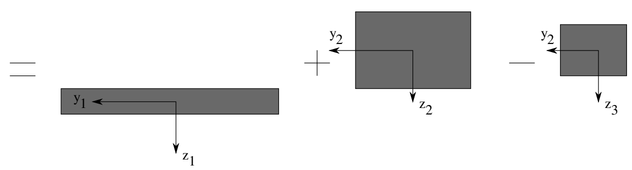
Also zusammen (beim Entlasten natürlich umgekehrte Richtung wie beim Belasten):

$$w = w_T + w_B = \frac{8}{\pi}\left(\frac{1}{G} + \frac{1}{3E}\right)\frac{M_D L^2}{d^4} \tag{5}$$

Aufgabe Z3

Bestimmen der Schwerpunktskoordinate





Berechnet wird der Abstand z_s des Schwerpunktkoordinatensystems y, z zum Koordinatensystem y_1, z_1.

Tabellenverfahren

	A_i	z_i	$A_i z_i$
1	$10 \cdot b^2$	0	0
2	$18 \cdot b^2$	$-2b$	$-36 \cdot b^3$
3	$-8 \cdot b^2$	$-\frac{3}{2}b$	$12 \cdot b^3$
$\sum$	$20 \cdot b^2$		$-24 \cdot b^3$

$$z_s = -\frac{6}{5}b \tag{6}$$

Bestimmen des FTM

Es gilt:

$$I_y = I_{1,y} + I_{2,y} - I_{3,y} \tag{7}$$
$$I_y = I_{1,y_1} + z_{s1}^2 A_1 + I_{2,y_2} + z_{s2}^2 A_2 - I_{3,y_3} - z_{s3}^2 A_3 \tag{8}$$

Dies kann mit einer erweiterten Tabelle leicht bestimmt werden.

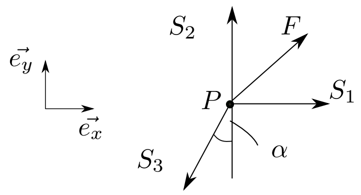
	A_i	$z_{si} = \lvert z_i - z_s \rvert$	z_{si}^2	$A_i z_{si}^2$	I_{i,y_i}
1	$10 \cdot b^2$	$\frac{6}{5}b$	$\frac{36}{25}b^2$	$\frac{360}{25}b^4$	$\frac{10}{12}b^4$
2	$18 \cdot b^2$	$\frac{4}{5}b$	$\frac{16}{25}b^2$	$\frac{288}{25}b^4$	$\frac{162}{12}b^4$
3	$-8 \cdot b^2$	$\frac{3}{10}b$	$\frac{9}{100}b^2$	$-\frac{18}{25}b^4$	$-\frac{32}{12}b^4$
$\sum$				$\frac{126}{5}b^4$	$\frac{35}{3}b^4$

$$I_y = \frac{553}{15}b^4 \tag{9}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 79

(a) Freischnitt:



Geometrie:

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{c} \tag{10}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} = \frac{a}{r} \tag{11}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{c}{r} \tag{12}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_y + S_2 - \frac{c}{r} S_3 = 0 \tag{13}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow S_1 + F_x - \frac{a}{r} S_3 = 0 \tag{14}$$

(b)

$$u_i' = \frac{\triangle l_i}{l_i} \tag{15}$$

wobei:

$$l_1 = b \quad l_2 = d \quad l_3 = r \tag{16}$$

$\triangle l_i$ folgen aus der Projektion des Verschiebungsvektors $\vec{U} = u_x \vec{ex} + u_y \vec{ey}$ auf die Stabeinheitsvektoren $\vec{e_{si}}$

$$\triangle l_i = \vec{U} \cdot \vec{e_{si}} \tag{17}$$

$$\vec{e_{s1}} = -\vec{e_x} \qquad \vec{e_{s2}} = -\vec{e_y} \qquad \vec{e_{s3}} = \frac{[+a\vec{e_x} + c\vec{e_y}]}{r} \tag{18}$$

$$\tag{19}$$

Das Skalarprodukt ergibt:

$$\triangle l_1 = -u_x \tag{20}$$

$$\triangle l_2 = -u_y \tag{21}$$

$$\triangle l_3 = \frac{1}{r}(au_x + cu_y) \tag{22}$$

(c) Matreialstrukturgesetz für Dehnstäbe:

$$S_i = EAu_i' = EA\frac{\triangle l_i}{l_i} \tag{23}$$

$$S_1 = -EA\frac{u_x}{b} \tag{24}$$

$$S_2 = -EA\frac{u_y}{d} \tag{25}$$

$$S_3 = EA\frac{(au_x + cu_y)}{r^2} \tag{26}$$

(d) Gleichung (13) $\cdot \frac{r}{c}$ und (14) $\cdot \frac{a}{r}$ multiplizieren und S_3 eliminieren:

$$\frac{r}{c}(F_y + S_2) = S_3 \tag{27}$$

$$\frac{r}{a}(F_x + S_1) = S_3 \tag{28}$$

$$\Rightarrow \frac{F_x}{a} - \frac{F_y}{c} + \frac{S_1}{a} = \frac{S_2}{c} \tag{29}$$

einsetzen der Stabkräfte ergibt:

$$\tag{30}$$

$$\frac{F_x}{a} - \frac{F_y}{c} - EA\frac{u_x}{ba} = -EA\frac{u_y}{dc} \tag{31}$$

$$\Rightarrow u_y = \left(\frac{F_x}{a} - \frac{F_y}{c}\right)\frac{-dc}{EA} + u_x\frac{dc}{ba} \tag{32}$$

Defenieren der Konstanten γ und δ

$$\tag{33}$$

$$u_y = \gamma + u_x \cdot \delta \tag{34}$$

Stabkräfte in (28) einsetzten und nach u_x auflösen:

$$\frac{r}{a}F_x - EA\frac{u_x r}{ba} = EA\frac{(au_x + cu_y)}{r^2} \tag{35}$$

u_y einsetzten

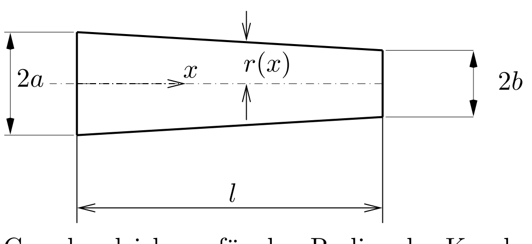
$$\frac{r}{a}F_x - EA\frac{u_x r}{ba} = EA\frac{(au_x + c\gamma + u_x c\delta)}{r^2} \tag{36}$$

$$\frac{r}{a}F_x - EA\frac{c\gamma}{r^2} = u_x\left(\frac{EAr}{ba} + \frac{EAa}{r^2} + \frac{c\delta}{r^2}\right) \tag{37}$$

$$u_x = \frac{\frac{r}{a}F_x - EA\frac{c\gamma}{r^2}}{\left(\frac{EAr}{ba} + \frac{EAa}{r^2} + \frac{c\delta}{r^2}\right)} \tag{38}$$

Aufgabe 93

(a)



Geradengleichung für den Radius des Kegels:

$$r(x) = \frac{b-a}{l}x + a$$
$$:= \alpha x + \beta$$

Polares Trägheitsmoment für die Kreisfläche:

$$I_p(x) = \frac{\pi}{2} r(x)^4$$
$$= \frac{\pi}{2}(\alpha x + \beta)^4$$

(b) Annahmen $M_t = const.$, $G = const.$, Torsions-Dgl. (gilt eigentlich nur für zylindrische Abschnitte, d.h. der Kegel muss stumpf sein! Siehe Szabo)

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_T}{GI_p}$$
$$\varphi = \int_0^l \frac{M_T}{G\frac{\pi}{2}(\alpha x+\beta)^4}dx$$
$$= \frac{2M_T}{G\pi}\int_0^l \frac{1}{(\alpha x+\beta)^4}dx$$
$$= \frac{2M_T}{G\pi}\int_0^l \frac{1}{z^4}\frac{1}{\alpha}dz$$
$$= \frac{2M_T}{G\pi}\left[-\frac{1}{3}\frac{1}{z^3}\frac{1}{\alpha}\right]_a^b$$
$$= \frac{2M_T l}{3G\pi(b-a)}\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^3}\right)$$

Aufgabe 112

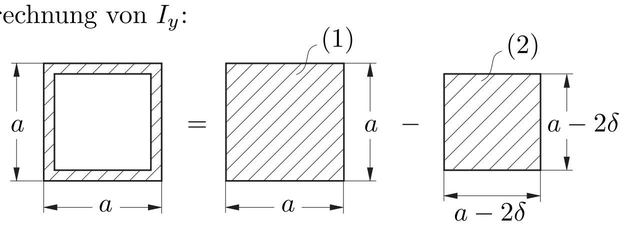
Flächenträgheitsmoment um die y-Achse ist gleich dem Flächenträgheitsmoment um die z-Achse, weil y- und z-Achsen Symmerieachsen der gegebenen Konfiguration sind.

$$I_y = I_z \tag{39}$$

Die Deviationsmomente I_{yz} verschwinden, weil y-Achse und z-Achse Symmetrieachsen sind.

$$I_{yz} = \int_{(A)} yz\,dA = 0 \tag{40}$$

Berechnung von I_y:

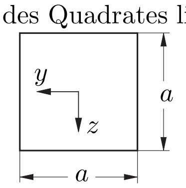


$$\boxed{I_y = I_{y_1} - I_{y_2}} \tag{41}$$

Definition des Flächenträgheitsmomentes um die y-Achse:

$$I_y = \int_{(A)} z^2 dA \tag{42}$$

Für ein Quadrat mit der Seitenlänge a gilt, wenn der Ursprung des Kartesischen Koordinatensystems (y,z) am Flächenmittelpunkt des Quadrates liegt:



$$I_{y_1} = \int_{(A)} z^2\,dA = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} z^2 dz\,dy$$
$$= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left[\frac{1}{3}z^3\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy = \frac{a^3}{12}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy = \frac{a^4}{12} \tag{43}$$

Somit erhält man für I_{y_1}

$$\boxed{I_{y_1} = \frac{1}{12}a^4} \tag{44}$$

und für I_{y_2} analog dazu:

$$\boxed{I_{y_2} = \frac{1}{12}(a-2\delta)^4} \tag{45}$$

(44) und (45) in (41) einsetzen:

$$I_y = \frac{1}{12}\left[a^4 - (a-2\delta)^4\right] \tag{46}$$

mit

$$(a-2\delta)^4 = a^4 - 4a^3 2\delta + 6a^2(2\delta)^2 - 4a(2\delta)^3 + (2\delta)^4 \tag{47}$$
$$= a^4 - 8a^3\delta + 24a^2\delta^2 - 32a\delta^3 + 16\delta^4 \tag{48}$$

erhält man für I_y:

$$I_y = \frac{a^4}{12}\left[8\frac{\delta}{a} - 24\left(\frac{\delta}{a}\right)^2 + 32\left(\frac{\delta}{a}\right)^3 - 16\left(\frac{\delta}{a}\right)^4\right] \tag{49}$$

Terme höherer Ordnung (Exponent ≥ 2) werden vernachlässigt $\left(\frac{\delta}{a} \ll 1\right)$. Somit gilt folgendes für I_y:

$$I_y \approx \frac{a^4}{12}\left(8\,\frac{\delta}{a}\right) = \frac{2}{3}\,a^3\delta \tag{50}$$

Auf das gleiche Ergebnis kommt man auch durch folgende Rechnung:

Wegen $\delta \ll a$ brauchen nur die Terme mit der höchsten Potenz in a berücksichtigt werden: Es wird für die (senkrechten) Stege je ein Rechteck der Höhe a angenommen ($I_S = 2\frac{\delta a^3}{12}$) und für die (horizontalen) Gurte nur ihr Steiner-Anteil berücksichtigt ($I_G = 2(\frac{a}{2})^2 a\delta$):

$$I_y = 2\frac{\delta a^3}{12} + 2(\frac{a}{2})^3\delta = \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)a^3\delta = \frac{2}{3}a^3\delta \tag{51}$$
