Tutorium

Aufgabe 129

Vorbetrachtung: Der eingeprägte Spannungszustand im Element wird durch die Größen σ_{xx}, σ_{yy} und τ_{xy} beschrieben. Es gelten folgende allgemeine Beziehungen:

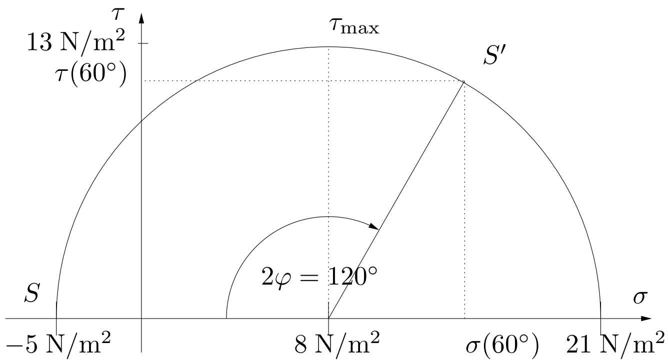
$$\sigma(\varphi) = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\cos 2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi \tag{1}$$

$$\tau(\varphi) = -\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi \tag{2}$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2} \tag{3}$$

(a) Konstruktion des Mohrschen Spannungskreises und grafische Lösung:

1. Koordinatensytem zeichnen: Horizontal die σ-Achse; vertikal die τ-Achse. σ_{xx} und σ_{yy} auf der σ-Achse eintragen.
2. τ_{xy} positiv über σ_{xx} und negativ unter σ_{yy} abtragen. Die entstandenen Endpunkte miteinander verbinden und diese Strecke als Durchmesser des Kreises identifizieren. Der Kreismittelpunkt ist der Mittelpunkt der Strecke zwischen σ_{xx} und σ_{yy} auf der σ-Achse.
3. Kreisbogen um den Mittelpunkt schlagen.
4. Trage den Winkel 2φ vom Punkt S (Spannung im Schnitt senkrecht zur x-Achse) zum Punkt S' im Uhrzeigersinn (mathematisch negativer Drehsinn) um den Mittelpunkt an.
5. σ und τ am Punkt S' ablesen.



Der Mohrschen Spannungskreis (Mittelpunkt und Durchmesser) kennzeichnet einen bestimmten Spannungszustand.[1]

Ein bestimmter Punkt am Umfang des Kreises bezeichnet die Spannungen im Schnitt unter einem bestimmten Schnittwinkel:[2]

Der Punkt S mit $\sigma = \sigma_{xx} = -5\,\mathrm{N/m^2}$, $\tau = \tau_{xy} = 0$ bezeichnet die Spannungen in einem Schnitt senkrecht zur x-Achse.

[1] Der Spannungszustand ist objektiv im Material vorhanden, unabhängig davon, wie der Beobachter sich einen Schnitt durch das Material denkt.

[2] Die Spannungen in einem gedachten Schnitt hängen von der Orientierung des gedachten Schnitts bzw. der Wahl des Koordinatensystems ab.

Der Punkt S' mit $\sigma = \sigma(\varphi)$, $\tau = \tau(\varphi)$ bezeichnet die Spannungen in einem Schnitt unter dem Winkel φ zur x-Achse.

Hier lesen wir ab:

$$\sigma(\varphi = 60^\circ) = 14{,}5\,\mathrm{N/m^2}$$
$$\tau(\varphi = 60^\circ) = 11{,}25\,\mathrm{N/m^2}$$

Rechnerische Lösung:

Normalspannung:

$$\sigma(\varphi) = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\cos 2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi \tag{4}$$

$$\text{hier:}\quad \sigma(\varphi) = \boxed{14{,}5\,\mathrm{N/m^2}} \tag{5}$$

Schubspannung:

$$\tau(\varphi) = -\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi \tag{6}$$

$$\text{hier:}\quad \tau(\varphi) = \boxed{11{,}25\,\mathrm{N/m^2}} \tag{7}$$

(b) $\tau_{\max} = ?$; $\varphi(\tau_{\max}) = ?$:

$$\tau_{\max} = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2} \tag{8}$$

$$\text{hier:}\quad \tau_{\max} = \boxed{13\,\mathrm{N/m^2}} \tag{9}$$

Der zugehörige Winkel ergibt sich aus der Skizze des Mohrschen Kreises bzw. aus der Gleichung für die Schubspannung:

aus der Skizze:

$$\varphi(\tau_{\max}) = +45^\circ$$

Aus der notw. Bed. für ein Extremum erhält man:

$$\frac{\partial \tau(2\varphi)}{\partial(2\varphi)} \overset{!}{=} 0 \tag{10}$$

$$\tan 2\varphi = \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{xx}}{2\tau_{xy}} \tag{11}$$

hier

$$2\varphi = \frac{\pi}{2} \pm n\pi \Longrightarrow \boxed{\varphi = \tfrac{\pi}{4} \pm n\tfrac{\pi}{2}}$$

(c) Hauptspannungen: Aus der Skizze liest man ab, dass die Richtungen, unter denen die Schubspannungen verschwinden, senkrecht aufeinander stehen. Außerdem liest man aus Skizze ab:

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = \sigma_{yy} = 21\,\mathrm{N/m^2} \text{ bei } 2\varphi = 180^\circ$$
$$\sigma_2 = \sigma_{\min} = \sigma_{xx} = -5\,\mathrm{N/m^2} \text{ bei } 2\varphi = 0^\circ$$

oder

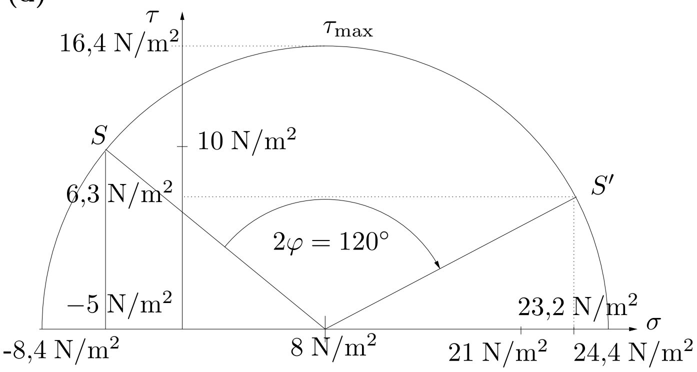
$$\boxed{\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\tau_{xy}^2 + \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2}} \tag{12}$$

Hauptspannungen = Mittelpunkt ± Radius

hier: $\tau_{xy} = 0$ und damit:

$$\boxed{\sigma_1 = \sigma_{xx}} \quad \text{und} \quad \boxed{\sigma_2 = \sigma_{yy}} \quad \text{s.o.} \tag{13}$$

(d)



Alles nochmals speziell für $\sigma_{xx} = -5\ \mathrm{N/m^2}$, $\sigma_{yy} = 21\ \mathrm{N/m^2}$, $\tau_{xy} = 10\ \mathrm{N/m^2}$ liefert

$$\begin{aligned}
\sigma(2\varphi = 120°) &= 23{,}16\ \mathrm{N/m^2}\\
\tau(2\varphi = 120°) &= 6{,}26\ \mathrm{N/m^2}\\
\sigma_1 &= 24{,}4\ \mathrm{N/m^2}\\
\sigma_2 &= \text{-}8{,}4\ \mathrm{N/m^2}\\
\tau_{\max} &= 16{,}4\ \mathrm{N/m^2}
\end{aligned}$$

φ für Hauptnormalspannungen ?
Bedingung:

$$\tau(\varphi) = -\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi = 0$$

$\Longrightarrow \tan 2\varphi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}} = \frac{20}{-5-21} = -\frac{20}{26}$
$\Longrightarrow 2\varphi = \text{-}37{,}6° + n\pi \Longrightarrow \boxed{\varphi = \text{-}18{,}8° + n\frac{\pi}{2}}$

Hauptspannungen und zugehörige Winkel:

$$(\sigma_{\min} = \text{-}8{,}4\ \mathrm{N/m^2}; -18,8°) \tag{14}$$
$$(\sigma_{\max} = 24{,}4\ \mathrm{N/m^2}; +71,2°) \tag{15}$$

Gesucht ist nun φ für $\tau_{\max}$:

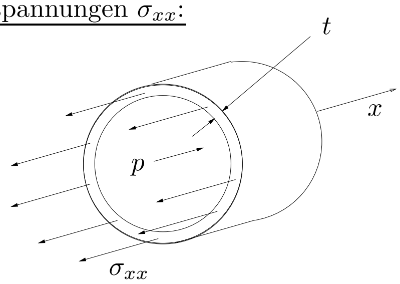
$$\tan 2\varphi = \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{xx}}{2\tau_{xy}} \tag{16}$$
$$= \frac{26}{20} \tag{17}$$

Da nur das Maximum gesucht ist:

$$2\varphi = 52{,}4° + n2\pi \tag{18}$$
$$\varphi = 26{,}2° + n\pi \tag{19}$$

Aufgabe 131

(a) Längsspannungen σ_{xx}:



Kreisringfläche:

$$\begin{aligned}
A_K &= \pi(r_a^2 - r_i^2) \quad \text{mit} \quad r_a = R + t; \quad r_i = R\\
&= \pi(r_a - r_i)(r_a + r_i)\\
&= \pi(R + t - R)(R + t + R) = \pi t(2R + t)\\
A_K &= 2\pi Rt + \pi t^2 \approx 2\pi Rt \quad \text{für} \quad t \ll l, t \ll R
\end{aligned}$$

Deckelfläche:

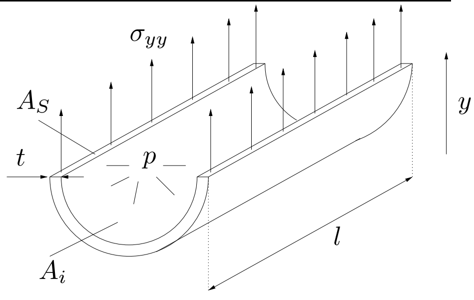
$$A_D = \pi r_i^2 = \pi R^2$$

Kräftegleichgewicht:

$$\begin{aligned}
\sum F_x = 0 &= -\sigma_{xx} A_K + pA_D\\
0 &= -\sigma_{xx} 2\pi Rt + p\pi R^2\\
&\Longrightarrow \boxed{\sigma_{xx} = \frac{1}{2}\frac{R}{t} p}
\end{aligned}$$

mit $t = 1 \cdot 10^{-3}\mathrm{m}$; $p = 2 \cdot 10^5 \mathrm{N/m^2}$; $R = \frac{1}{2}\mathrm{m}$ folgt $\sigma_{xx} = 5 \cdot 10^7 \mathrm{N/m^2}$

Umfangsspannungen = Tangentialspannungen:



Schnittfläche und Zylinderinnenfläche[3]:

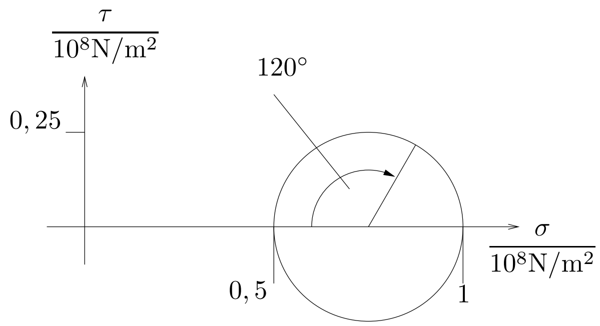
$$\begin{aligned}
A_S &= 2lt\\
A_i &= 2Rl
\end{aligned}$$

Kräftegleichgewicht:

$$\begin{aligned}
\sum F_y = 0 &= \sigma_{yy} A_S - pA_i\\
0 &= \sigma_{yy} 2lt - p2Rl\\
&\Longrightarrow \boxed{\sigma_{yy} = \frac{R}{t} p = 2\sigma_{xx}} = 1 \cdot 10^8 \mathrm{N/m^2}
\end{aligned}$$

(b)

[3] projizierte Fläche! (siehe Erklärung weiter unten im Text)

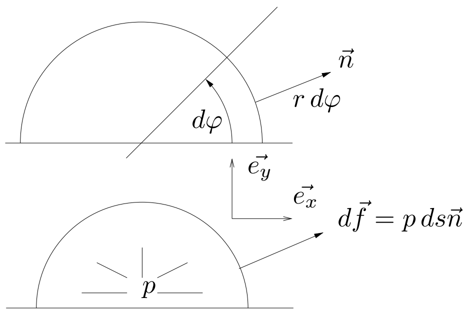


(c) grafische Lösung: $\sigma(\varphi = 60°) = 0,875 \cdot 10^8 \mathrm{N/m^2}$; $\tau(\varphi = 60°) = 0,2165 \cdot 10^8 \mathrm{N/m^2}$
rechnerische Lösung:

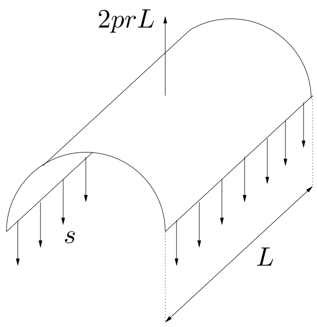
$$\begin{aligned}
\sigma(\varphi) &= \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\cos 2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi \\
&= \frac{1,5\cdot 10^8}{2}\mathrm{N/m^2} - \frac{0,5\cdot 10^8}{2}\mathrm{N/m^2}\cos 120° + 0 \\
&\boxed{\sigma(\varphi = 60°) = 0,875\cdot 10^8\mathrm{N/m^2}} \\
\tau(\varphi) &= -\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi \\
&= -\frac{0,5\cdot 10^8}{2}\mathrm{N/m^2}\sin 120° + 0 \\
&\boxed{\tau(\varphi = 60°) = 0,2165\cdot 10^8\mathrm{N/m^2}}
\end{aligned}$$

(d) aus der Skizze des Mohrschen Kreises ist ersichtlich, dass $\tau_{max} = 0,25\cdot 10^8\mathrm{N/m^2}$ bei $2\varphi = 90°$ herrscht.

Nachtrag: Erklärung warum die projizierte Fläche relevant ist:



$$\begin{aligned}
\vec{n} &= \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}_{<\vec{e_i}>} \\
d\vec{f} &= pr\,d\varphi\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}_{<\vec{e_i}>} \\
\vec{f} &= \int d\vec{f} = pr\int_0^\pi \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix} d\varphi \\
&= pr\begin{bmatrix}\sin\varphi\\ -\cos\varphi\end{bmatrix}_0^\pi = pr\begin{pmatrix}0\\ 1+1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$



$$[\vec{f}] = 1\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}; \quad [prL] = 1\mathrm{N}; [s] = 1\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

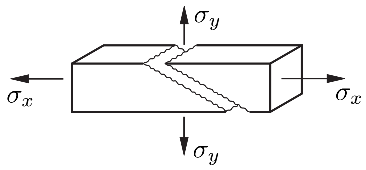
GGB: $2prL = s2L \Longrightarrow s = pr$

$$\boxed{\sigma_U = \frac{s}{t} = \frac{pr}{t}}$$

Hausaufgaben

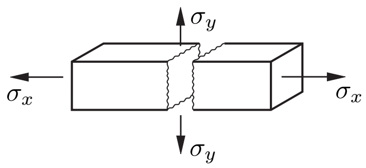
Aufgabe 126 (wird nicht bekannte Aufgabe)

<u>Motivation:</u>



Material:

- schubweich / nicht schubfest



- geringe Zugfestigkeit, spröde

Es gibt unterschiedliche Materialversagens-Hypothesen:

- Normalspannungshypothese ($\sigma_v = \sigma_1$)
- Schubspannungshypothese ($\sigma_v = 2\tau_m ax$)
- Gestaltänderungsenergie-Hyp. (v.Mises: $\sigma_v^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\,\sigma_2$)
- Erweiterte Schubspannungshyp. (Mohr)

<u>rechnerische Lösung:</u>

Gegebene Spannungen:

$$\sigma_x = 100 \text{ MPa} \tag{20}$$
$$\sigma_y = 60 \text{ MPa} \tag{21}$$
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -48 \text{ MPa} \tag{22}$$

(a)

1. Hauptspannung σ_{H1}

$$\sigma_{H1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{23}$$

2. Hauptspannung σ_{H2}

$$\sigma_{H2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{24}$$

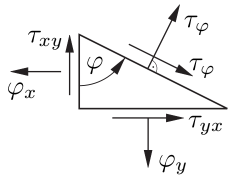
$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 80 \text{ MPa} \tag{25}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 52 \text{ MPa} \tag{26}$$

Ergebnis:

$$\underline{\sigma_{H1}} = 80 \text{ MPa} + 52 \text{ MPa} = 132 \text{ MPa} > \sigma_x \tag{27}$$
$$\underline{\sigma_{H2}} = 80 \text{ MPa} - 52 \text{ MPa} = \underline{28 \text{ MPa}} < \sigma_y \tag{28}$$

Hauptrichtung φ_H:



Aus GGW am Flächenelement ist die Schubspannung τ_φ:

$$\tau_\varphi = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \tag{29}$$

Bedingung für φ_H:

$$\boxed{\tau_\varphi \stackrel{!}{=} 0} \tag{30}$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi_H = \frac{1}{2} \arctan\Big(-\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\Big) \tag{31}$$
$$\varphi_H = \frac{1}{2} \arctan(-2{,}4) = -0{,}588 \mathrel{\hat{=}} -33{,}6^\circ \tag{32}$$

(b) max. Schubspannung:

$$\Big[\text{bei } \varphi_{\tau\max} = \frac{\pi}{4} + \varphi_H = 11{,}31^\circ\Big] \tag{33}$$

$$\tau_{\max} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{34}$$
$$= \pm\Big(\frac{\sigma_{H1} - \sigma_{H2}}{2}\Big) = \pm 52 \text{ MPa} \tag{35}$$

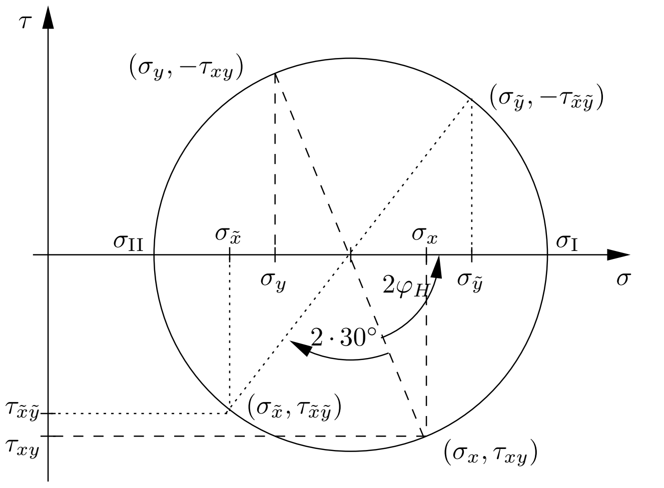
(c) Spannungskomponenten im Koordinatensystem $\tilde{x}, \tilde{y}$ unter $\varphi = 30^\circ$ zum x, y-System:

$$\sigma_{\tilde{x}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \tag{36}$$
$$= 80 \text{ MPa} + 20 \text{ MPa} \cos 60^\circ - 48 \text{ MPa} \sin 60^\circ$$
$$= 48{,}43 \text{ MPa}$$
$$\tau_{\tilde{x}\tilde{y}} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \tag{37}$$
$$= -20 \text{ MPa} \sin 60^\circ - 48 \text{ MPa} \cos 60^\circ$$
$$= -41{,}32 \text{ MPa}$$

Die Spur des Spannungstensors (die Summe der Hauptdiagonalelemente der entsprechenden Matrix) ist invariant gegen eine Drehung des Koordinatensystems. (Ebenso die Determinante, aber das wird hier nicht ausgenutzt.)

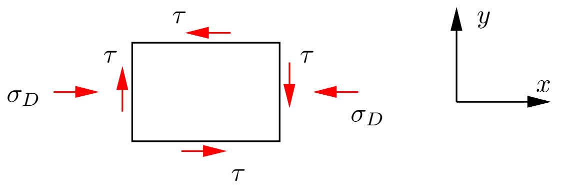
$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_{\tilde{x}} + \sigma_{\tilde{y}} = \sigma_{H1} + \sigma_{H2} \tag{38}$$
$$\sigma_{\tilde{y}} = \sigma_x + \sigma_y - \sigma_{\tilde{x}} = 111{,}57 \text{ MPa} \tag{39}$$

<u>Grafische Lösung:</u>



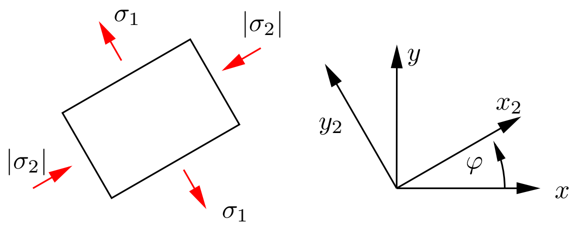
Aufgabe 128

Wir denken uns ein rechteckiges Stück Rohrmantel freigeschnitten, so daß zwei Kanten des Rechtecks mit der x-Achse (Rohrachse) parallel sind.



Wir können auch ein rechteckiges Stück Rohrmantel unter einem anderen Winkel freischneiden, dann ergeben sich andere Spannungen an den Kanten des Rechtecks.

Wir wollen ein Rechteck so freischneiden, daß eine Kante parallel zur Schweißnaht verläuft. τ soll so gewählt sein, daß dann hier keine Schubspannungen auftreten. Die in diesem speziellen Schnitt auftretenden Normalspannungen sind die sog. Hauptspannungen σ_1 und σ_2:



(a) Mit Hilfe des Mohrschen Spannungskreises läßt sich der Winkel bestimmen, unter dem keine Schubspannungen auftreten:

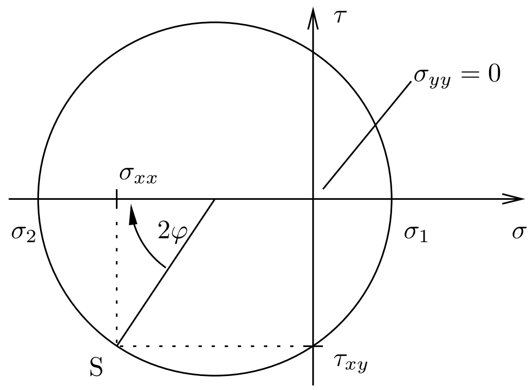
1. Koordinatensytem zeichnen: Horizontal die σ-Achse; vertikal die τ-Achse. σ_{xx} und σ_{yy} auf der σ-Achse eintragen.

2. τ_{xy} positiv über σ_{xx} und negativ unter σ_{yy} abtragen. Die entstandenen Endpunkte miteinander verbinden und diese Strecke als Durchmesser des Kreises identifizieren. Der Kreismittelpunkt ist der Mittelpunkt der Strecke zwischen σ_{xx} und σ_{yy} auf der σ-Achse.

3. Kreisbogen um den Mittelpunkt schlagen.

4. Trage den Winkel 2φ vom Punkt S (Spannung im Schnitt senkrecht zur x-Achse) zur (hier negativen) σ-Achse im Uhrzeigersinn (mathematisch negativer Drehsinn) um den Mittelpunkt an.

5. φ ist der Winkel (um die z-Achse positiv gezählt) von der Rohrlängs- bzw. x-Achse zur Hauptspannungsachse (hier der mit der negativen Hauptspannung σ_2).



Hier:

$$\sigma_{xx} = -\sigma_D \qquad \sigma_{yy} = 0 \tag{40}$$

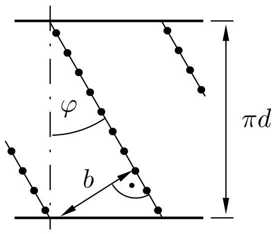
$$\tau_{xy} = -\tau \tag{41}$$

Wir lesen ab:

$$\tan 2\varphi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = \frac{2\tau}{\sigma_D} \tag{42}$$

$$\hookrightarrow \quad \frac{\sigma_D}{\tau} = \frac{2}{\tan 2\varphi} \tag{43}$$

Bleibt noch zu bestimmen der Winkel φ der Schweißnaht zur Querschnittsrichtung. Aus der Skizze des abgerollten Rohrmantels lesen wir ab:



$$\sin \varphi = \frac{b}{\pi d} \tag{44}$$

$$\varphi = \arcsin \frac{b}{\pi d} = 0{,}498 \tag{45}$$

$$(= 28{,}5°)$$

Aus Gl. (43) ergibt sich für die gegebenen Zahlenwerte:

$$\frac{\sigma_D}{\tau} = 1{,}297 \tag{46}$$

(b) Für die Hauptspannungen lesen wir aus dem Mohrschen Spannungskreis ab:

$$\sigma_{1/2} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{47}$$

$$= -\frac{\sigma_D}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_D}{2}\right)^2 + \tau^2} \tag{48}$$

$$= \sigma_D \left[-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\tau}{\sigma_D}\right)^2}\right] \tag{49}$$

$$\sigma_1 = 1676 \text{ N/mm}^2 \qquad (\ldots \text{Zug}) \tag{50}$$

$$\sigma_2 = -5676 \text{ N/mm}^2 \qquad (\ldots \text{Druck}) \tag{51}$$

Aufgabe 130

(a) Maximale Schubspannungen

Unter Beachtung der Schnittlastenkonvetion wird identifiziert:

$$\sigma_x = \sigma_0, \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{3}{4}\sqrt{3}\sigma_0, \qquad \sigma_y = -\frac{\sigma_0}{2} \tag{52}$$

Für die maximale Schubspannung $\tau_{\max}$ ergibt sich:

$$\tau_{\max} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{53}$$

$$= \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_0 + \frac{1}{2}\sigma_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\sqrt{3}\sigma_0\right)^2}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{9}{16}\sigma_0^2 + \frac{27}{16}\sigma_0^2}$$

$$= \underline{\underline{\pm\frac{3}{2}\sigma_0}} \tag{54}$$

(b) Hauptspannungen und -richtungen

$$\sigma_{I/II} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{55}$$

$$= \frac{\sigma_0 - \frac{1}{2}\sigma_0}{2} \pm \frac{3}{2}\sigma_0$$

$$\Rightarrow \sigma_I = \underline{\underline{\frac{7}{4}\sigma_0}} \tag{56}$$

$$\sigma_{II} = \underline{\underline{-\frac{5}{4}\sigma_0}} \tag{57}$$

$$\tan 2\varphi^* = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \tag{58}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}\sigma_0}{\frac{3}{2}\sigma_0} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2\varphi_1^* = 60^\circ \Rightarrow \underline{\underline{\varphi_1^* = 30^\circ}} \tag{59}$$

$$\Rightarrow 2\varphi_2^* = 240^\circ \Rightarrow \underline{\underline{\varphi_2^* = 120^\circ}} \tag{60}$$

(c) Mohrscher Kreis