Tutorium

Aufgabe 113

r_i und r_a sind Innen- und Außenradius des Rohrs, A ist der Flächeninhalt des Querschnitts.
Alternativ zur (recht einfachen) Berechnung des Flächenträgheitsmoments mit Hilfe der Polarkoordinaten sei hier das Vorgehen in karthesischen Koordinaten (y, z) demonstriert.

$$I_{yy} = \int_A z^2 dA \overset{\text{Subst.}}{=} \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_a} r^2 \sin^2 \varphi \, r \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \tag{1}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4} r^4\right]_{r_i}^{r_a} \sin^2 \varphi \mathrm{d}\varphi \tag{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(r_a^4 - r_i^4\right) \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \mathrm{d}\varphi \tag{3}$$

$$= \frac{1}{4}\left(r_a^4 - r_i^4\right) \left[\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right]_0^{2\pi} \tag{4}$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(r_a^4 - r_i^4\right) \tag{5}$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \left[(51\ \mathrm{cm})^4 - (49\ \mathrm{cm})^4\right] = 78{,}57\ \mathrm{dm}^4 \tag{6}$$

Zur Integration. Mit partieller Integration erhält man:

$$\int \sin^2 x \mathrm{d}x = -\cos x \sin x + \int \cos^2 x \mathrm{d}x \tag{7}$$

$$= -\cos x \sin x + \int (1 - \sin^2 x)\mathrm{d}x \tag{8}$$

$$2\int \sin^2 x \mathrm{d}x = -\cos x \sin x + \int dx + \tilde{C} \tag{9}$$

$$\int \sin^2 x \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos x \sin x + \frac{x}{2} + C \tag{10}$$

...und mit Additionstheorem:

$$= -\frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{x}{2} + C \tag{11}$$

Oder gleich mit Additionstheorem:

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right) \mathrm{d}x \tag{12}$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + C \tag{13}$$

Wegen der Symmetrie ist das Flächenträgheitsmoment bezüglich jeder Achse, die durch den Mittelpunkt geht, unabhängig vom Winkel gleich I_{yy}. (z.B. $I_{zz} = I_{yy}$.)

Aus dem Satz von Steiner ergibt sich für die um e aus dem Flächenmittelpunkt verschobene Achse η:

$$I_{\eta\eta} = I_{yy} + Ae^2 = \frac{\pi}{4}\left(r_a^4 - r_i^4\right) + \pi\left(r_a^2 - r_i^2\right)e^2 \tag{14}$$

$$= 103{,}70\ \mathrm{dm}^4 = 0{,}01\ \mathrm{m}^4 \tag{15}$$

Aufgabe 115

(a) Für das Biegemoment gibt es drei Bereiche zu untersuchen. Das System ist statisch bestimmt.

Bereich I: $0 < x < a$

$$-q_{\mathrm{I}} = Q_{\mathrm{I}}{}' \Rightarrow Q_{\mathrm{I}}{}' = 0 \Rightarrow Q_{\mathrm{I}} = c_1 \tag{16}$$

$$M_{\mathrm{I}}{}' = Q_{\mathrm{I}} \Rightarrow M_{\mathrm{I}}{}' = c_1 \Rightarrow M_{\mathrm{I}} = c_1 x + c_2 \tag{17}$$

Bereich II: $a < x < l - a$

$$-q_{\mathrm{II}} = Q_{\mathrm{II}}{}' \Rightarrow Q_{\mathrm{II}}{}' = 0 \Rightarrow Q_{\mathrm{II}} = c_3 \tag{18}$$

$$M_{\mathrm{II}}{}' = Q_{\mathrm{II}} \Rightarrow M_{\mathrm{II}}{}' = c_3 \Rightarrow M_{\mathrm{II}} = c_3 x + c_4 \tag{19}$$

Bereich III: $l - a < x < l$

$$-q_{\mathrm{III}} = Q_{\mathrm{III}}{}' \Rightarrow Q_{\mathrm{III}}{}' = 0 \Rightarrow Q_{\mathrm{III}} = c_5 \tag{20}$$

$$M_{\mathrm{III}}{}' = Q_{\mathrm{III}} \Rightarrow M_{\mathrm{III}}{}' = c_5 \Rightarrow M_{\mathrm{III}} = c_5 x + c_6 \tag{21}$$

Somit ist es ersichtlich, dass pro Bereich 2 Konstanten zu berechnen sind.(3 Bereiche liegen vor, d.h. $3 \cdot 2 = 6$ Konstanten: c_i mit $i = 1, 2..6$)

Für die Berechnung dieser 6 Konstanten braucht man 6 linear unabhängige Gleichungen. Diese Gleichungen ergeben sich aus den Rand-und Übergangsbedingungen:

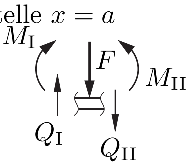
Randbedinungen

$$M_{\mathrm{I}}\left(x = 0\right) = 0 \tag{22}$$

$$M_{\mathrm{III}}\left(x = l\right) = 0 \tag{23}$$

Übergangsbedingungen

Freischnitt an der Stelle $x = a$

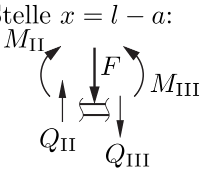


Die Gleichgewichtsbedingungen ergeben folgende Übergangsbedingungen:

$$M_{\mathrm{I}}\left(x = a\right) = M_{\mathrm{II}}\left(x = a\right) \tag{24}$$

$$Q_{\mathrm{I}}\left(x = a\right) = F + Q_{\mathrm{II}}\left(x = a\right) \tag{25}$$

Freischnitt an der Stelle $x = l - a$:



Die Gleichgewichtsbedingungen ergeben folgende Übergangsbedingungen:

$$M_{\mathrm{II}}\left(x = l - a\right) = M_{\mathrm{III}}\left(x = l - a\right) \tag{26}$$

$$Q_{\mathrm{II}}\left(x = l - a\right) = F + Q_{\mathrm{III}}\left(x = l - a\right) \tag{27}$$

Somit liegen jetzt 6 Gleichungen für die Berechnung der Konstanten c_i ($i = 1, 2..6$) vor. Es können alle diese 6 Konstanten eindeutig bestimmt werden. (Die 6 Gleichungen sind linear unabhängig voneinander.)

$$\text{Aus (22) in (17) folgt}: \ c_2 = 0 \tag{28}$$

$$\text{Aus (23) in (21) folgt}: \ c_6 = -c_5 l \tag{29}$$

$$\text{Aus (24) folgt}: \; c_1 a + c_2 = c_3 a + c_4 \tag{30}$$
$$\text{Aus (25) folgt}: \; c_1 = F + c_3 \tag{31}$$
$$\text{Aus (26) folgt}: \; c_3(l-a) + c_4 = c_5(l-a) + c_6 \tag{32}$$
$$\text{Aus (27) folgt}: \; c_3 = F + c_5 \tag{33}$$

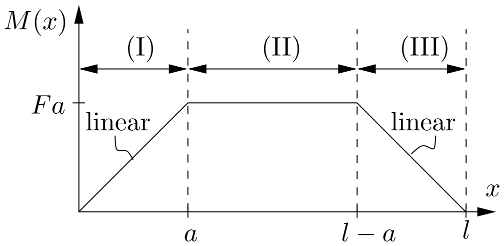
Die Lösungen dieses Gleichungssystems lauten:

$$c_1 = F \quad , \quad c_2 = 0 \quad , \quad c_3 = 0 \tag{34}$$
$$c_4 = Fa \; , \quad c_5 = -F \; , \quad c_6 = Fl \tag{35}$$

Somit erhält man für das jeweilige Biegemoment indem man die Konstanten einsetzt:

$$M_{\mathrm{I}}(x) = Fx \tag{36}$$
$$M_{\mathrm{II}}(x) = Fa = \text{const.} \geq 0 \tag{37}$$
$$M_{\mathrm{III}}(x) = F(l-x) \tag{38}$$

Graphische Darstellung:

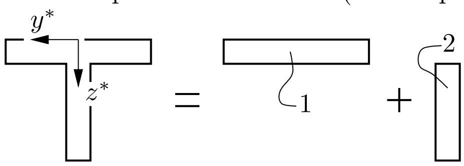


Somit ist das Biegemoment im zweiten Bereich (entlang des ganzen Bereichs) maximal und konstant.

$$M_{\max} = Fa = 3750\,\mathrm{N\,m} \tag{39}$$

Das ist der Maximalwert des Biegemomentes im Balken (um die y-Achse).

(b) Flächenmittelpunkt des T-Profils (Balkenquerschnitt)



Flächenmittelpunkt in y^*-Richtung:

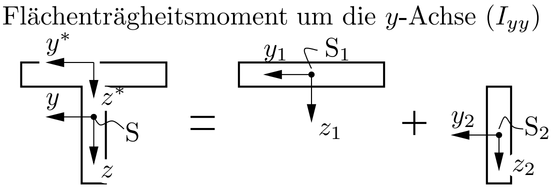
$$y_S^* = 0 \tag{40}$$

Flächenmittelpunkt in z^*-Richtung:

Körper	y_i^*	z_i^*	A_i	$y_i^* A_i$	$z_i^* A_i$
$i=1$	0	$\frac{t}{2}$	bt	0	$\frac{1}{2}bt^2$
$i=2$	0	$t+\frac{c}{2}$	ct	0	$ct(t+\frac{c}{2})$
$\sum$	—	—	$(b+c)t$	0	$\frac{1}{2}bt^2 + ct(t+\frac{c}{2})$

$$z_S^* = \frac{\sum_{i=1}^{2} A_i\, Z_i^*}{\sum_{i=1}^{2} A_i} = \frac{\frac{bt}{2} + c\,t + \frac{c^2}{2}}{b+c} \tag{41}$$
$$= \frac{b\,t + 2c\,t + c^2}{2(b+c)} \approx 24{,}642\mathrm{mm} \tag{42}$$

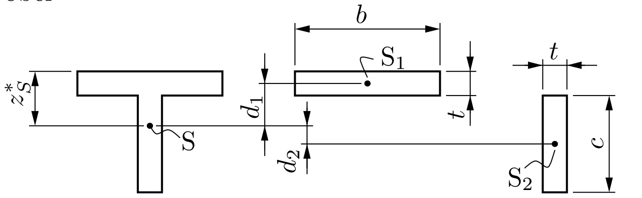
(c) Flächenträgheitsmoment um die y-Achse (I_{yy})



Mit dem Satz von Steiner:

$$I_{yy} = I_{y_1y_1} + d_1^2 A_1 + I_{y_2y_2} + d_2^2 A_2 \tag{43}$$

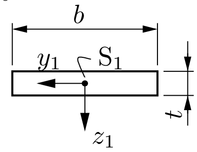
wobei



woraus ersichtlich ist, dass:

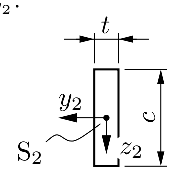
$$A_1 = b\,t\,, A_2 = c\,t\,,\; d_1 = z_S^* - \frac{t}{2} = \frac{c}{2}\,\frac{c+t}{b+c} \;\text{und}$$
$$d_2 = t + \frac{c}{2} - z_S^* = \frac{b}{2}\,\frac{c+t}{b+c}$$

Berechnung von $I_{y_1y_1}$:



$$I_{y_1y_1} = \int_{(A_1)} z_1^2\, d\,A_1 \tag{44}$$
$$= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z_1^2 d\,z_1 d\,y_1 = \frac{1}{12} b\,t^3 \tag{45}$$

Berechnung von $I_{y_2y_2}$:



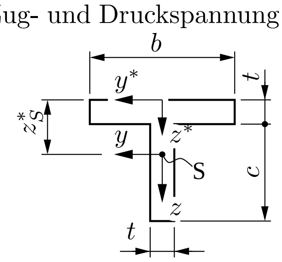
Analog gilt folgendes:

$$I_{y_2y_2} = \int_{(A_2)} z_2^2\, d\,A_2 \tag{46}$$
$$= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} z_2^2 d\,z_2 d\,y_2 = \frac{1}{12} t\,c^3 \tag{47}$$

jetzt wird alles $I_{y_1y_1}, I_{y_2y_2}, A_1, A_2, d_1, d_2$) in Gleichnung (43) gesetzt.

$$I_{yy} = \frac{1}{12} b\,t^3 + \frac{c^2}{4}\Big(\frac{c+t}{b+c}\Big)^2 b\,t \tag{48}$$
$$+ \frac{1}{12} t\,c^3 + \frac{b^2}{4}\Big(\frac{c+t}{b+c}\Big)^2 c\,t \tag{49}$$
$$= \frac{1}{4}\,t\Big[\frac{1}{3}\,(b\,t^2 + c^3) + b\,c\,\frac{(c+t)^2}{b+c}\Big] \tag{50}$$
$$\approx 1{,}409 \cdot 10^6 \mathrm{mm}^4 \tag{51}$$

(d) Maximale Zug- und Druckspannung im Maschinenteil



$$\boxed{\sigma(z) = \frac{M}{I_{yy}}\, z} \tag{52}$$

(M ist hier das Moment um die y-Achse)

Flächenträgheitsmoment aus Gleichung (50):

$$I_{yy} = \frac{1}{4}\, t \left[\frac{1}{3}\big(b\, t^2 + c^3\big) + b\, c\, \frac{(c+t)^2}{b+c}\right] = \text{konst.} \tag{53}$$

$\sigma(z) = \sigma_{max}(z)$ bei $M = M_{max}$ und $z = z_{max}$.

M_{max} aus Frage **(b)** Gleichung (39):

$$M_{max} = F\, a \tag{54}$$

z_{max} kann aus der Skizze zur Geometrie abgelesen werden:

unterer Rand des T-Profils (Zugbeanspruchung): $$z_{max} = t + c - z_S^* \tag{55}$$

oberer Rand des T-Profils (Druckbeanspruchung): $$z_{max} = -z_S^* \tag{56}$$

Am unteren Rand des Profils:

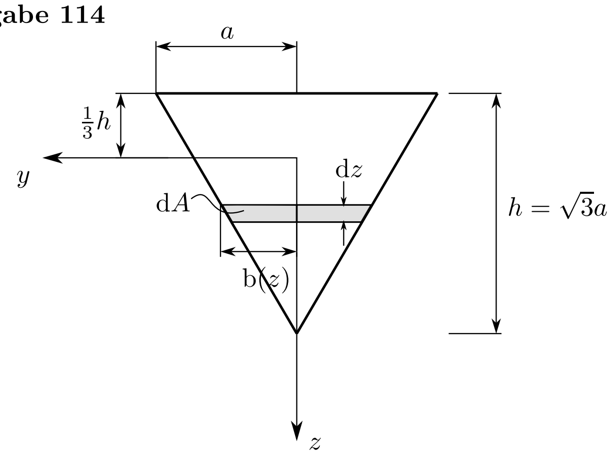
$$\sigma_{max,Zug} = \frac{Fa}{I_{yy}}\big(t + c - z_S^*\big) \approx 165,963\, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} \tag{57}$$

Am oberen Rand des Profils:

$$\sigma_{max,Druck} = \frac{Fa}{I_{yy}}\big(-z_S^*\big) \approx -65,583\, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} \tag{58}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 114



$$I_y = \int_{-\frac{1}{3}h}^{\frac{2}{3}h} z^2\, \mathrm{d}A \tag{59}$$

$$= \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}a}^{\frac{2}{\sqrt{3}}a} z^2 2\, \mathrm{b}(z)\mathrm{d}z \tag{60}$$

$\mathrm{b}(z)$ ist als Geradengleichung der Dreieckskante aufzufassen:

$$\mathrm{b}(z) = -\frac{1}{\sqrt{3}} z + \frac{2}{3} a\,. \tag{61}$$

Damit ergibt sich für I_y:

$$I_y = 2\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}a}^{\frac{2}{\sqrt{3}}a} z^2\Big(-\frac{1}{\sqrt{3}}z + \frac{2}{3}a\Big)\, \mathrm{d}z \tag{62}$$

$$= 2\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}a}^{\frac{2}{\sqrt{3}}a} \Big(-\frac{1}{\sqrt{3}}z^3 + \frac{2}{3}az^2\Big)\, \mathrm{d}z \tag{63}$$

$$= 2\left[-\frac{1}{4\sqrt{3}}z^4 + \frac{2}{9}az^3\right]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}a}^{\frac{2}{\sqrt{3}}a} \tag{64}$$

$$= 2\left[-\frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{16}{9}a^4 + \frac{2}{9}\frac{8}{3\sqrt{3}}a^4 + \frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{1}{9}a^4 + \frac{2}{9}\frac{1}{3\sqrt{3}}a^4\right] \tag{65}$$

$$= 2a^4\left[-\frac{15}{4\sqrt{3}\,9} + \frac{18}{3\sqrt{3}\,9}\right] = \left[-\frac{5}{6} + \frac{4}{3}\right]\frac{a^4}{\sqrt{3}} \tag{66}$$

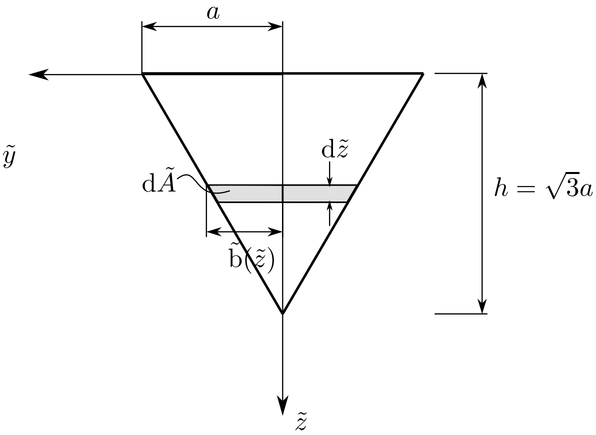
$$I_y = \underline{\underline{\frac{1}{6}\sqrt{3}\, a^4}} \tag{67}$$

Um die Integration zu vereinfachen kann die Aufgabe auch mit Hilfe des Steinerschen Satzes gelößt werden. Es gilt:

$$I_{\tilde{y}} = I_y + \tilde{z}_s^2 A \tag{68}$$

$$\Rightarrow I_y = I_{\tilde{y}} - \tilde{z}_s^2 A \tag{69}$$

wobei $\tilde{z}_s = \frac{1}{\sqrt{3}}a$ ist und $A = \sqrt{3}\, a^2$ ist.



$\tilde{\mathrm{b}}(\tilde{z}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{z} + a$ und für $\mathrm{d}\tilde{A}$ gilt $\mathrm{d}\tilde{A} = 2\,\tilde{\mathrm{b}}(\tilde{z})\,\mathrm{d}\tilde{z}$. Damit ergibt sich für $I_{\tilde{y}}$:

$$I_{\tilde{y}} = \int_0^{\sqrt{3}a} \tilde{z}^2 2\tilde{\mathrm{b}}(\tilde{z})\,\mathrm{d}\tilde{z} \tag{70}$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{3}a} \tilde{z}^2(-\frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{z} + a)\,\mathrm{d}\tilde{z} \tag{71}$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{3}a} (-\frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{z}^3 + a\tilde{z}^2)\,\mathrm{d}\tilde{z} \tag{72}$$

$$= 2\left[-\frac{1}{4\sqrt{3}}\tilde{z}^4 + \frac{1}{3}a\tilde{z}^3\right]_0^{\sqrt{3}a} \tag{73}$$

$$= -\frac{1}{2}3\sqrt{3}a^4 + \frac{4\sqrt{3}}{2}a^4 \tag{74}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a^4\,. \tag{75}$$

Schließlich ergibt sich für I_y:

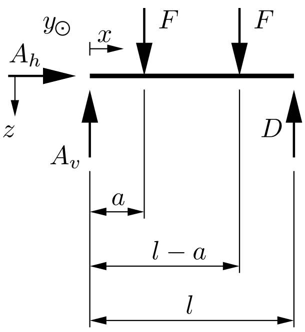
$$I_y = \frac{1}{2}\sqrt{3}a^4 - \frac{1}{3}\sqrt{3}a^4 \tag{76}$$

$$\underline{\underline{= \frac{1}{6}\sqrt{3}\,a^4}} \tag{77}$$

Aufgabe 118

<u>Auflagerreaktionen:</u>

Freischnitt:



Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_h = 0} \tag{78}$$

$$\sum M_y^A = 0 \Rightarrow -Fa - F(l-a) + Dl = 0 \tag{79}$$

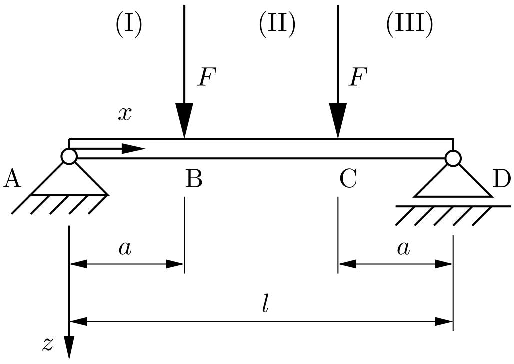
$$\Rightarrow \boxed{D = F} \tag{80}$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow -A_v + 2F - D = 0 \tag{81}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_v = F} \tag{82}$$

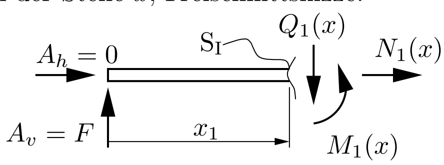
<u>Biegemoment $M(x)$:</u>

Es gibt drei Bereiche zu untersuchen (I, II und III)



<u>Bereich I:</u> $0 \leq x_1 < a$

Schnitt an der Stelle x, Freischnittskizze:

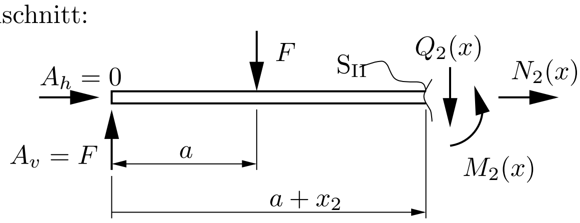


Bei $\mathrm{S_I}$: positives Schnittufer!

$$\sum M_y^{(\mathrm{S_I})} = M_1(x) - Fx_1 = 0 \Rightarrow M_1(x) = Fx_1 \tag{83}$$

<u>Bereich II:</u> $0 \leq x_2 < l - 2a$

Freischnitt:



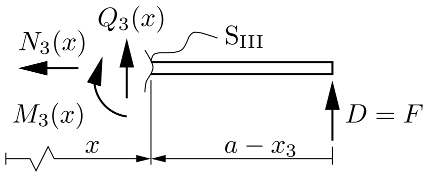
Bei $\mathrm{S_{II}}$: positives Schnittufer!

$$\sum M_y^{(\mathrm{S_{II}})} = M_2(x) - F(x_2 + a) + F\,(x_2) \stackrel{!}{=} 0 \tag{84}$$

$$\Rightarrow M_2(x) = Fa = \text{konst.} \tag{85}$$

Bereich III: $0 \leq x_3 \leq a$

Freischnitt:

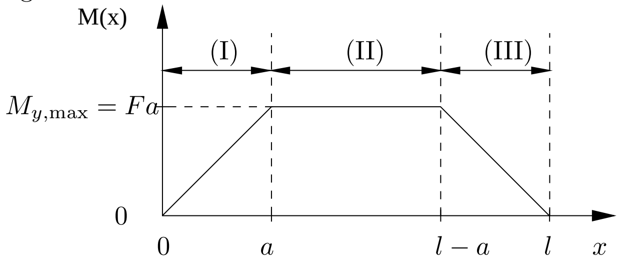


Bei $\mathrm{S_{III}}$: negatives Schnittufer!

$$\sum M_y^{(\mathrm{S_{III}})} = -M_3(x) + F\,(a - x_3) = 0 \qquad (86)$$

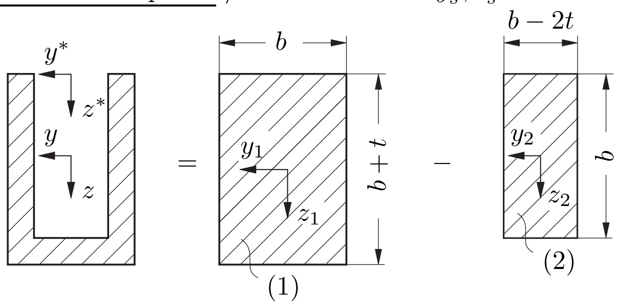
$$\Rightarrow M_3(x) = F\,(a - x_3) \qquad (87)$$

Biegemomentenverlauf:



Das ist das maximale Biegemoment $M_{y,\max} = Fa$ tritt also im zweiten Bereich auf und ist dort konstant.

Flächenschwerpunkt / Bestimmen von y_s^*, z_s^* :



$y_s^* = 0$ (aufgrund der Symmetrie)

Tabelle für die Berechnung von z_S^*:

i	z_i^*	A_i	$z_i^* A_i$
1	$\frac{b+t}{2}$	$b(b+t)$	$\frac{b}{2}(b+t)^2$
2	$\frac{b}{2}$	$b(b-2t)$	$\frac{b^2}{2}(b-2t)$
$\sum$	—	$3bt$	$\frac{bt}{2}(4b+t)$

$$z_\mathrm{S}^* = \frac{\sum_{i=1}^{2} A_i z_i^*}{\sum_{i=1}^{2} A_i} = \frac{\frac{bt}{2}(4b+t)}{3bt} \qquad (88)$$

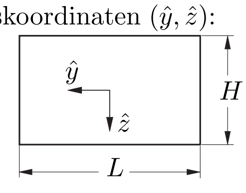
$$= \frac{4b+t}{6} \qquad (89)$$

Flächenträgheitsmoment I_{yy}:

Mit dem Satz von Steiner:

$$I_{yy} = I_{y_1y_1} + d_1^2 A_1 - I_{y_2y_2} - d_2^2 A_2 \qquad (90)$$

Für ein Rechteck der Höhe H und der Breite L gilt bzgl. der Schwerpunktskoordinaten $(\hat{y}, \hat{z})$:



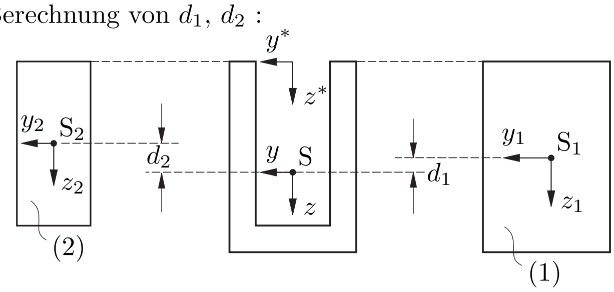
$$I_{\hat{y}\hat{y}} = \int_{(A)} \hat{z}^2 dA = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \hat{z}^2 d\hat{z} d\hat{y} = \frac{1}{12} H^3 L \qquad (91)$$

Somit erhält man:

$$I_{y_1y_1} = \frac{1}{12}\big(b+t\big)^3 b \quad \text{und} \qquad (92)$$

$$I_{y_2y_2} = \frac{1}{12} b^3 \big(b - 2t\big) \quad . \qquad (93)$$

Berechnung von d_1, d_2 :



Aus der Geometrie:

$$A_1 = b\,(b+t)\ , \quad A_2 = -b\,(b-2t)\ , \qquad (94)$$

$$d_1 = z_S^* - \frac{b+t}{2} \quad \text{und} \quad d_2 = z_S^* - \frac{b}{2} \qquad (95)$$

Einsetzen von $I_{y_1y_1}$, $I_{y_2y_2}$, A_1, A_2, d_1 und d_2, in die Gleichung (90) liefert:

$$I_{yy} = \frac{1}{12}(b+t)^3 b + \left(z_\mathrm{S}^* - \frac{b+t}{2}\right)^2 b(b+t) + \dots$$
$$- \frac{1}{12} b^3 (b-2t) - \left(z_\mathrm{S}^* - \frac{b}{2}\right)^2 b(b-2t) \qquad (96)$$

$$= \frac{1}{3} b^3 t + \mathcal{O}(b^2 t^2) \quad . \qquad (97)$$

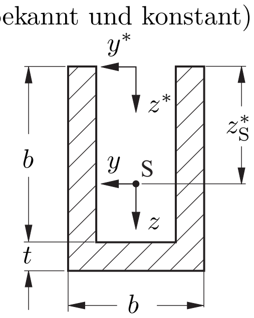
Gesucht sind die maximale Zug- und Druckspannung in dem Maschinenteil. Für die Normalspannung σ gilt für das Hauptträgheitsachsensystem (y,z):

$$\sigma(x,y,z) = \frac{M_y(x)}{I_{yy}} z - \underbrace{\frac{M_z(x)}{I_{zz}} y}_{=0,\,\text{ebener Lastfall}} + \underbrace{\frac{N(x)}{A}}_{=0,\,N_i(x)=0\,\forall i} \qquad (98)$$

Daraus folgt, dass:

$$\sigma = \sigma_{\max}(z) \quad \text{bei} \quad M(x) = M(x)_{\max} \quad \text{und} \quad z = z_{\max} \qquad (99)$$

(I_{yy} ist schon bekannt und konstant).



Somit ist $z_{\max}$:

$$z_{\max} = \begin{cases} b + t - z_\mathrm{S}^* & \text{am unteren Rand des Profils: Zugspannung} \\ -z_\mathrm{S}^* & \text{am oberen Rand des Profils: Druckspannung} \end{cases} \qquad (100)$$

Daraus folgt, dass:

$$\sigma_{\text{max, Zug}} = \frac{Fa}{I_{yy}}\left(b + t - z_S^*\right) \tag{101}$$

und

$$\sigma_{\text{max, Druck}} = -\frac{Fa}{I_{yy}} z_S^* \quad . \tag{102}$$
