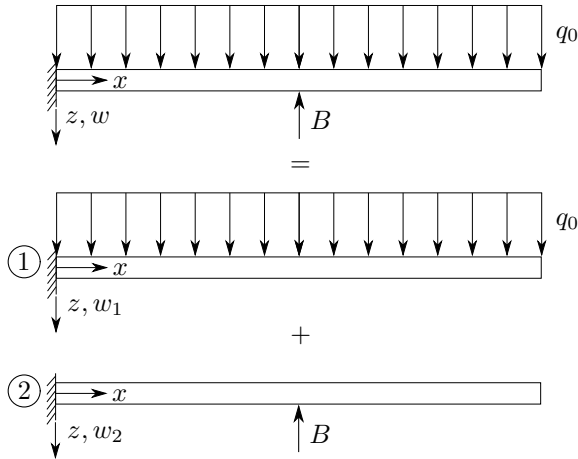


# Tutorium

## Aufgabe 108

Auflagerkraft  $B$  wird als „statisch Unbestimmte“ behandelt und das Ersatzsystem wird in zwei einfache Teilsysteme zerlegt.

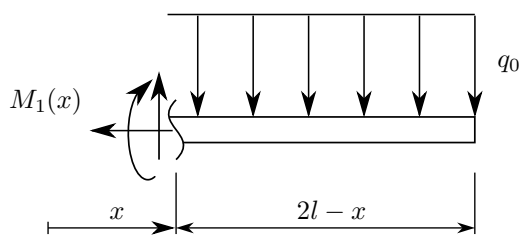


Superposition:

$$w(x, B) = w_1(x) + w_2(x, B) \quad (1)$$

Zunächst wird die Biegelinie der (quasi statisch bestimmten) Teilsysteme bestimmt.

### Teilsystem ①



GGB:

$$\sum M^{(S)} = 0 \Rightarrow M_1(x) = -\frac{1}{2}q_0(2l-x)^2 \quad (2)$$

MSG:

$$-EI_y w_1''(x) = -\frac{1}{2}q_0(2l-x)^2 \quad (3)$$

$$-EI_y w_1'(x) = \frac{1}{6}q_0(2l-x)^3 + C_1 \quad (4)$$

$$-EI_y w_1(x) = -\frac{1}{24}q_0(2l-x)^4 + C_1x + C_2 \quad (5)$$

Geometrische RB:

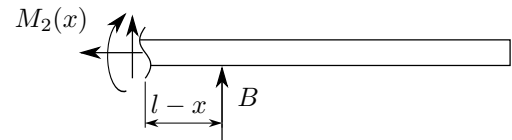
$$w_1(0) = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{2}{3}q_0l^4 \quad (6)$$

$$w_1'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{4}{3}q_0l^3 \quad (7)$$

$$\Rightarrow w_1(x) = \frac{q_0l^4}{24EI_y} \left[ \left(2 - \frac{x}{l}\right)^4 + 32\frac{x}{l} - 16 \right] \quad (8)$$

### Teilsystem ②

Hier wird nur die Biegelinie im ersten Bereich benötigt ( $0 \leq x \leq l$ ).



GGB:

$$\sum M^{(S)} = 0 \Rightarrow M_2(x, B) = B(l-x) \quad (9)$$

MSG:

$$-EI_y w_2''(x, B) = B(l-x) \quad (10)$$

$$-EI_y w_2'(x, B) = Blx - \frac{1}{2}Bx^2 + C_3 \quad (11)$$

$$-EI_y w_2(x, B) = Bl\frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}Bx^3 + C_3x + C_4 \quad (12)$$

Geometrische RB:

$$w_2(0, B) = 0 \Rightarrow C_4 = 0 \quad (13)$$

$$w_2'(0, B) = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \quad (14)$$

$$\Rightarrow w_2(x, B) = \frac{1}{6} \frac{Bl^3}{EI_y} \left[ \left(\frac{x}{l}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 \right] \quad (15)$$

Biegelinie des Ersatzsystems ( $0 \leq x \leq l$ )

$$w(x, B) = \frac{q_0l^4}{24EI_y} \left[ \left(2 - \frac{x}{l}\right)^4 + 32\frac{x}{l} - 16 \right] + \frac{1}{6} \frac{Bl^3}{EI_y} \left[ \left(\frac{x}{l}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 \right] \quad (16)$$

Geometrische Verträglichkeitsbedingung

$$w(l, B) \stackrel{!}{=} 0 \quad (17)$$

$$\Rightarrow \frac{q_0l^4}{24EI_y} [1^4 + 32 - 16] + \frac{1}{6} \frac{Bl^3}{EI_y} [1^3 - 3] = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{B = \frac{17}{8}q_0l}} \quad (18)$$

(b) Biegemoment bei  $x = 0$

$$M(x=0) = M_1(x=0) + M_2(x=0, B) = \frac{17}{8}q_0l$$

$$= -2q_0l^2 + \frac{17}{8}q_0l^2 = \underline{\underline{\frac{1}{8}q_0l^2}} \quad (19)$$

(c) Neigungswinkel bei  $x = l$

$$\varphi_B := w'(x=l) \quad (20)$$

mit

$$w'(x) = \frac{q_0l^3}{24EI_y} \left[ -4\left(2 - \frac{x}{l}\right)^3 + 32 \right] + \frac{17q_0l^3}{48EI_y} \left[ 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 6\frac{x}{l} \right] \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
 w'(x=l) &= \frac{q_0 l^3}{24EI_y} [-4 + 32] + \frac{17q_0 l^3}{48EI_y} [3 - 6] \\
 &= \frac{q_0 l^3}{EI_y} \left[ \frac{7}{6} - \frac{17}{16} \right] \\
 &= \frac{5q_0 l^3}{48EI_y} \quad (22)
 \end{aligned}$$

**Aufgabe 109**

Für das Querverformungsproblem (Biegelinie):

$x$	$w$	$w'$	$M$	$Q$
0	$w_I = 0$	-	$M_I = -c_M w'_I$	-
$l$	$w_I = w_{II}$	$w'_I = w'_{II}$	$M_I = M_{II} + M_0$	$Q_I = Q_{II}$
$2l$	$w_{II} = w_{III}$	-	$M_{II} = 0$ $M_{III} = 0$	$Q_{II} = Q_{III}$
$3l$	$w_{III} = 0$ $w_{IV} = 0$	$w'_{III} = w'_{IV}$	$M_{III} = M_{IV}$	-
$4l$	$w_{IV} = 0$	$w'_{IV} = 0$	-	-

Die Integration der Biegeliniendifferentialgleichung

$$(EIw'')''(x) = q(x) \quad (23)$$

für die vier Bereiche I bis IV führt auf insgesamt 16 Integrationskonstanten. Diese lassen sich mit den oben angegebenen 16 Rand- und Übergangsbedingungen bestimmen.

**Hausaufgaben**

**Aufgabe 103**

(a) Nein, das dreiwertige Lager links und das einwertige rechts ergeben zusammen vier Auflagerreaktionskomponenten, die sich nicht allein aus den drei Gleichgewichtsbeziehungen bestimmen lassen, das System ist statisch unbestimmt. Deshalb lassen sich auch die Schnittlasten nicht allein aus den Gleichgewichtsbeziehungen bestimmen:

$$3n \stackrel{?}{=} s + v \quad (24)$$

$$3 \cdot 1 \neq 4 + 0 \quad (25)$$

⇒ statisch unbestimmtes System

(b) Biegeliniendiff'gl.:

$$EIw''''(x) = 0 \quad (26)$$

$$EIw''''(x) = C_1 \quad (27)$$

$$EIw''(x) = C_1 x + C_2 \quad (28)$$

$$EIw'(x) = \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3 \quad (29)$$

$$EIw(x) = \frac{C_1}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4 \quad (30)$$

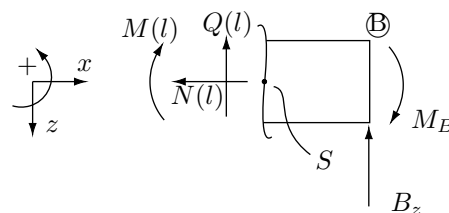
Randbedingungen:

$$w(0) = 0 \quad \Rightarrow C_4 = 0 \quad (31)$$

$$w'(0) = 0 \quad \Rightarrow C_3 = 0 \quad (32)$$

$$w(l) = 0 \quad \Rightarrow \frac{l^3}{6} C_1 + \frac{l^2}{2} C_2 = 0 \quad (33)$$

Schnitt bei B  $x = l$ :



$$\sum M_S = 0 = -M(l) - M_B \quad (34)$$

$$M(l) = -M_B \quad (35)$$

$$M(l) = -M_B \quad \Rightarrow lC_1 + C_2 = M_B \quad (36)$$

aus (33) und (36) ergibt sich:

$$C_1 = \frac{3M_B}{2l} \quad (37)$$

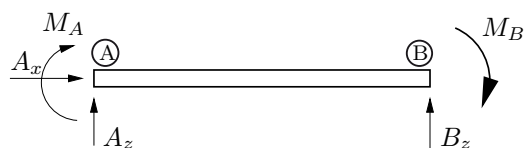
$$C_2 = -\frac{M_B}{2} \quad (38)$$

Querkraft- und Biegemomentenverlauf:

$$Q(x) = -EIw'''(x) = -\frac{3}{2} \frac{M_B}{l} \quad (39)$$

$$M(x) = -EIw''(x) = \frac{3}{2} M_B \left[ \frac{1}{3} - \frac{x}{l} \right] \quad (40)$$

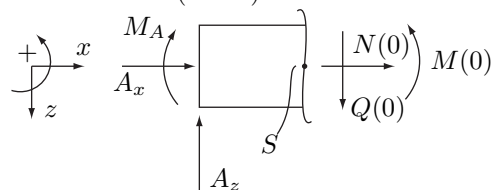
Auflagerreaktion (gemäß folgender Freischnittskizze):



$$w_1(l) = \frac{1}{2} \frac{M_B l^2}{EI} \quad (50)$$

$$w_2(l) = -\frac{1}{3} \frac{B_z l^3}{EI} \quad (51)$$

Schnitt bei A ( $x = 0$ ):



$$\sum M_S = 0 = -M_A + M(x=0) \quad (41)$$

$$\Rightarrow M_A = M(0) = \frac{1}{2} M_B \quad (42)$$

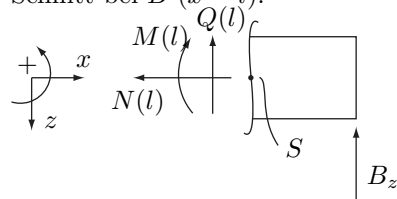
$$\sum F_z = 0 = -A_z + Q(x=0) \quad (43)$$

$$\Rightarrow A_z = Q(0) = \frac{-3}{2} \frac{M_B}{l} \quad (44)$$

$$\sum F_x = 0 = N(x=0) + A_x = 0 \quad (45)$$

$$N(x=0) = 0 \Rightarrow A_x = 0 \quad (46)$$

Schnitt bei B ( $x = l$ ):



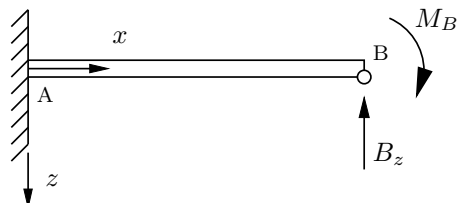
$$\sum F_z = 0 = -B_z - Q(l) = 0 \quad (47)$$

$$\Rightarrow B_z = -Q(l) = \frac{3}{2} \frac{M_B}{l} \quad (48)$$

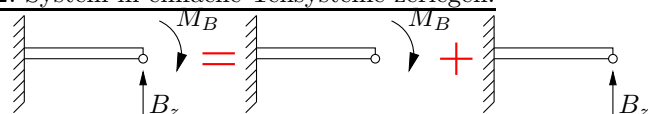
**(c) 1. Statisch bestimmtes Ersatzsystem:**

Ersetze eine Fesselung durch ihre unbekannte Reaktionslast. Diese wird nun im folgenden als äußere Last behandelt (als wenn sie bekannt wäre).

Zum Beispiel wird das rechte Loslager durch die Kraft  $B_z$  ersetzt und wir erhalten folgendes statisch bestimmte Ersatzsystem:



**2. System in einfache Teilsysteme zerlegen:**



Superpositionsprinzip: Die Gesamtverformung ergibt sich aus der Summe der Verformung der Teilsysteme:

$$w(x) = w_1(x) + w_2(x) \quad (49)$$

**3. Lösungen der einfachen Teilsysteme, z.B. aus Tabellen:**

**4. Geometrische Verträglichkeitsbedingung (Zwangsbedingung)**

$$w(l) = 0 \quad (52)$$

Die Auswertung der Zwangsbedingung liefert uns die unbekannte Reaktionskraft  $B_z$ :

$$w_1(l) + w_2(l) = 0 \quad (53)$$

$$\frac{1}{2} \frac{M_B l^2}{EI} - \frac{1}{3} \frac{B_z l^3}{EI} = 0 \Rightarrow B_z = \frac{3}{2} \frac{M_B}{l} \quad (54)$$

**5. Auswertung Biegemomentenverlauf aus Superposition der Biegemomente der Teilsysteme:**

$$M(x) = M_1(x) + M_2(x) \quad (55)$$

$M_1$  und  $M_2$  z.B. aus Tabelle oder Globalschnitt und Gleichgewichtsbeziehungen:

$$M_1(x) = -M_B \quad (56)$$

$$M_2(x) = B_z(l-x) = \frac{3}{2} M_B \left[1 - \frac{x}{l}\right] \quad (57)$$

$$\Rightarrow M(x) = M_B \left[\frac{1}{2} - \frac{3x}{2l}\right] \quad (58)$$

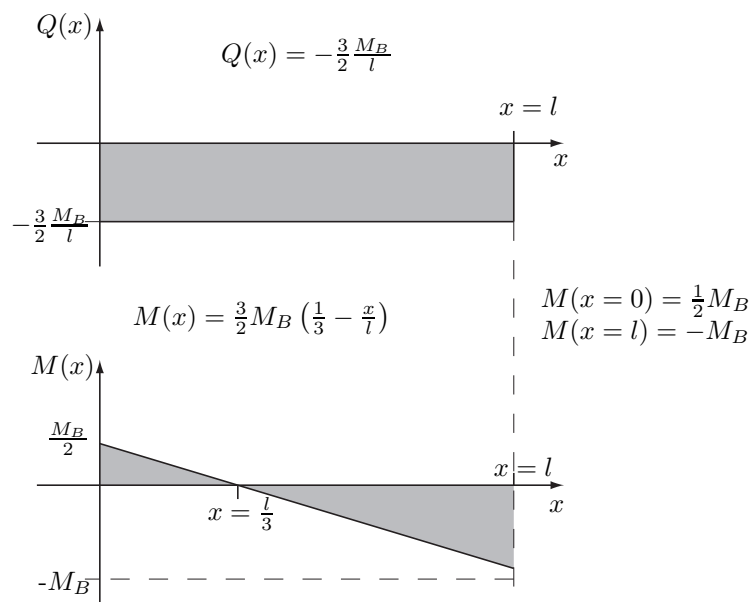
Lagerreaktionen (die restlichen außer  $B_z$ ) z.B. aus Gleichgewichtsbeziehungen:

$$M_A = \frac{M_B}{2} \quad (59)$$

$$A_z = -\frac{3}{2} \frac{M_B}{l} \quad (60)$$

**(d)** Da  $M(x)$  linear verläuft, siehe Gl. (40), muß das Maximum von  $|M(x)|$  an einem Ende auftreten:

$$\max |M(x)| = \max \left\{ \frac{1}{2} M_B, | -M_B | \right\} = M_B \quad (61)$$



**Aufgabe 105**

(a) Nein, zwei einwertige Lager und ein zweiwertiges ergeben zusammen vier Auflagerreaktionskomponenten, die sich nicht allein aus den drei Gleichgewichtsbeziehungen bestimmen lassen, das System ist statisch unbestimmt. Deshalb lassen sich auch die Schnittlasten nicht allein aus den Gleichgewichtsbeziehungen bestimmen.

(b) Allgemeine Lösung der Biegeliniendifferentialgleichung:

Bereich I,  $0 \leq x < \frac{2}{3}l$ :

$$EIw_I''''(x) = q_0 \quad (62)$$

$$EIw_I'''(x) = q_0l \left\{ \left[ \frac{x}{l} \right] + C_1 \right\} \quad (63)$$

$$EIw_I''(x) = q_0l^2 \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{x}{l} \right]^2 + C_1 \left[ \frac{x}{l} \right] + C_2 \right\} \quad (64)$$

$$EIw_I'(x) = q_0l^3 \left\{ \frac{1}{6} \left[ \frac{x}{l} \right]^3 + \frac{C_1}{2} \left[ \frac{x}{l} \right]^2 + C_2 \left[ \frac{x}{l} \right] + C_3 \right\} \quad (65)$$

$$EIw_I(x) = q_0l^4 \left\{ \frac{1}{24} \left[ \frac{x}{l} \right]^4 + \frac{C_1}{6} \left[ \frac{x}{l} \right]^3 + \frac{C_2}{2} \left[ \frac{x}{l} \right]^2 + C_3 \left[ \frac{x}{l} \right] + C_4 \right\} \quad (66)$$

Bereich II,  $\frac{2}{3}l < x \leq l$ :

$$EIw_{II}''''(x) = q_0 \quad (67)$$

$$EIw_{II}'''(x) = q_0l \left\{ \left[ \frac{x}{l} \right] + C_5 \right\} \quad (68)$$

$$EIw_{II}''(x) = q_0l^2 \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{x}{l} \right]^2 + C_5 \left[ \frac{x}{l} \right] + C_6 \right\} \quad (69)$$

$$EIw_{II}'(x) = q_0l^3 \left\{ \frac{1}{6} \left[ \frac{x}{l} \right]^3 + \frac{C_5}{2} \left[ \frac{x}{l} \right]^2 + C_6 \left[ \frac{x}{l} \right] + C_7 \right\} \quad (70)$$

$$EIw_{II}(x) = q_0l^4 \left\{ \frac{1}{24} \left[ \frac{x}{l} \right]^4 + \frac{C_5}{6} \left[ \frac{x}{l} \right]^3 + \frac{C_6}{2} \left[ \frac{x}{l} \right]^2 + C_7 \left[ \frac{x}{l} \right] + C_8 \right\} \quad (71)$$

Rand- und Übergangsbedingungen:

$$w_I(0) = 0 \quad (72)$$

$$w_I\left(\frac{2}{3}l\right) = 0 \quad (73)$$

$$w_{II}\left(\frac{2}{3}l\right) = 0 \quad (74)$$

$$w_{II}(l) = 0 \quad (75)$$

$$w_I'\left(\frac{2}{3}l\right) = w_{II}'\left(\frac{2}{3}l\right) \quad (76)$$

$$M_I(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad w_I''(0) = 0 \quad (77)$$

$$M_I\left(\frac{2}{3}l\right) = M_{II}\left(\frac{2}{3}l\right) \quad \Rightarrow \quad w_I''\left(\frac{2}{3}l\right) = w_{II}''\left(\frac{2}{3}l\right) \quad (78)$$

$$M_{II}(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad w_{II}''(l) = 0 \quad (79)$$

Aus diesen Gleichungen erhält man durch Einsetzen nach

längerer Rechnung die folgenden Konstanten:

$$C_1 = -\frac{13}{48} \quad C_2 = 0 \quad (80)$$

$$C_3 = \frac{5}{648} \quad C_4 = 0 \quad (81)$$

$$C_5 = -\frac{23}{24} \quad C_6 = \frac{11}{24} \quad (82)$$

$$C_7 = -\frac{47}{324} \quad C_8 = \frac{11}{324} \quad (83)$$

Für die Auflagerkräfte wird der Querkraftverlauf benötigt. Mit

$$-EIw''(x) = M(x), \quad M'(x) = Q(x) \quad (84)$$

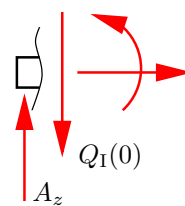
$$-EIw'''(x) = Q(x) \quad (85)$$

ergibt sich

$$Q_I(x) = q_0l \left\{ \frac{13}{48} - \left[ \frac{x}{l} \right] \right\} \quad (86)$$

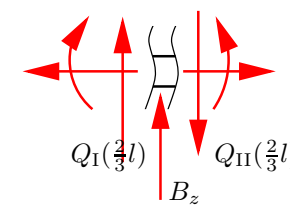
$$Q_{II}(x) = q_0l \left\{ \frac{23}{24} - \left[ \frac{x}{l} \right] \right\} \quad (87)$$

Freischnitt und Gleichgewicht am linken Ende:



$$A_z = Q_I(0) = \frac{13}{48}q_0l \quad (88)$$

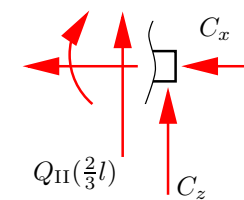
Freischnitt und Gleichgewicht am mittleren Lager:



$$B_z = Q_{II}\left(\frac{2}{3}l\right) - Q_I\left(\frac{2}{3}l\right) \quad (89)$$

$$= \frac{11}{16}q_0l \quad (90)$$

Freischnitt und Gleichgewicht am rechten Lager:



$$C_z = -Q_{II}(l) = \frac{1}{24}q_0l \quad (91)$$

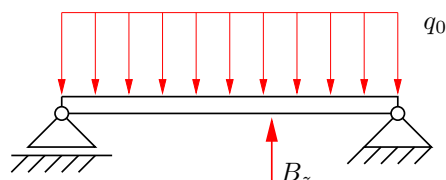
(Und  $C_x = 0$  aus Gleichgewicht für den gesamten Balken.)

(c)

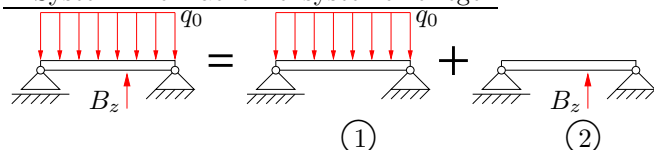
1. Statisch bestimmtes Ersatzsystem:

Ersetze eine Fesselung durch ihre unbekannte Reaktionslast. Diese wird nun im folgenden als äußere Last behandelt (als wenn sie bekannt wäre).

Zum Beispiel wird das mittlere Lager B durch die Kraft  $B_z$  ersetzt und wir erhalten folgendes statisch bestimmte Ersatzsystem:



2. System in einfache Teilsysteme zerlegen



Superpositionsprinzip: Die Gesamtverformung ergibt sich aus der Summe der Verformung der Teilsysteme:

$$w(x) = w_1(x) + w_2(x) \quad (92)$$

3. Lösungen der einfachen Teilsysteme z.B. aus Tabellenwerk (Hütte, Dubbel o. ä.):

$$w_1(x) = \frac{q_0 l^4}{EI} \left\{ \frac{1}{24} \left[ \frac{x}{l} \right]^4 - \frac{1}{12} \left[ \frac{x}{l} \right]^3 + \frac{1}{24} \left[ \frac{x}{l} \right] \right\} \quad (93)$$

$$\Rightarrow w_1\left(\frac{2}{3}l\right) = \frac{11}{972} \frac{q_0 l^4}{EI} \quad (94)$$

$$w_2(x) = \begin{cases} w_{2I}(x) & ; x < \frac{2}{3}l \\ w_{2II}(x) & ; x > \frac{2}{3}l \end{cases}, \text{ mit} \quad (95)$$

$$w_{2I}(x) = \frac{B_z l^3}{EI} \left\{ \frac{1}{18} \left[ \frac{x}{l} \right]^3 - \frac{4}{81} \left[ \frac{x}{l} \right] \right\} \text{ und} \quad (96)$$

$$w_{2II}(x) = \frac{B_z l^3}{EI} \left\{ -\frac{1}{9} \left[ \frac{x}{l} \right]^3 + \frac{1}{3} \left[ \frac{x}{l} \right]^2 - \frac{22}{81} \left[ \frac{x}{l} \right] + \frac{4}{81} \right\} \quad (97)$$

$$\Rightarrow w_2\left(\frac{2}{3}l\right) = -\frac{4}{243} \frac{B_z l^3}{EI} \quad (98)$$

4. Geometrische Verträglichkeitsbedingung (Zwangsbedingung)

$$w\left(\frac{2}{3}l\right) = 0 \quad (99)$$

Die Auswertung der Zwangsbedingung liefert uns die unbekanntene Reaktionskraft  $B_z$ :

$$w_1\left(\frac{2}{3}l\right) + w_2\left(\frac{2}{3}l\right) \stackrel{!}{=} 0 \quad (100)$$

$$\Rightarrow B_z = \frac{11}{16} q_0 l \quad (101)$$

Das ist das gleiche Ergebnis wie in Teil (b), siehe Gl. (90).

(d) Der Verdrehwinkel oder die Neigung ist (bei kleinen Verformungen) gleich der ersten Ableitung der Biegelinie an dieser Stelle:

$$\varphi_A = w_1'(0) = \frac{q_0 l^3}{EI} C_3 = \frac{5}{648} \frac{q_0 l^3}{EI} \quad (102)$$

**Aufgabe 106**

(a) Statische Bestimmtheit

Überprüfen der notwendigen Bedingung

$$3n = r$$

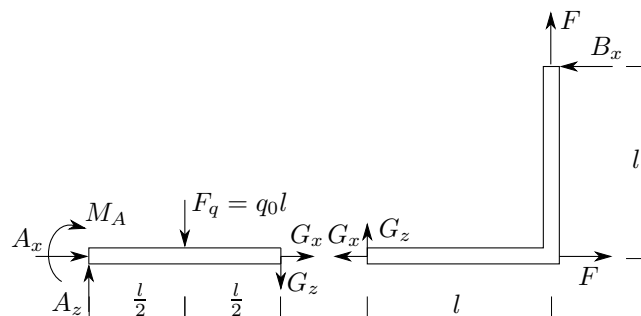
mit  $n$  Anzahl der Körper,  $r$  Anzahl der Reaktionen.

$$3 \cdot 2 = 3 + 2 + 1 \Rightarrow 6 = 6 \quad \checkmark$$

Die Balken sind verspannungsfrei eingebaut und sind nicht wackelig.

(b) Lagerreaktionen und Gelenkkräfte

Freischnitt:



Rechtes Teilsystem:

$$\sum F_z = -F - G_z = 0 \quad (103)$$

$$\Rightarrow G_z = -F \quad (104)$$

$$\sum M^{(G)} = F \cdot l + B_x \cdot l = 0 \quad (105)$$

$$\Rightarrow B_x = -F \quad (106)$$

$$\sum F_x = F - B_x - G_x = 0 \quad (107)$$

$$\Rightarrow G_x = 2F \quad (108)$$

Linkes Teilsystem:

$$\sum F_x = A_x + G_x = 0 \quad (109)$$

$$\Rightarrow A_x = -2F \quad (110)$$

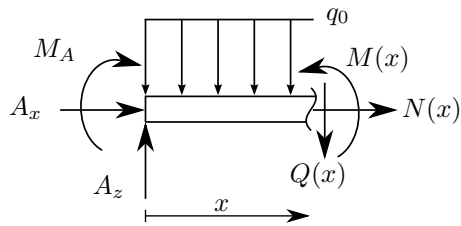
$$\sum F_z = -A_z + q_0 l + G_z = 0 \quad (111)$$

$$\Rightarrow A_z = -F + q_0 l \quad (112)$$

$$\sum M^{(A)} = -M_A - q_0 l \cdot \frac{l}{2} - G_z \cdot l = 0 \quad (113)$$

$$\Rightarrow M_A = Fl - \frac{1}{2} q_0 l^2 \quad (114)$$

(c) Biegemoment im Bereich  $\overline{AG}$



$$\sum M^{(S)} = M(x) - M_A - A_z \cdot x + q_0 x \cdot \frac{x}{2} = 0 \quad (115)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow M(x) &= M_A + A_z x - q_0 \frac{x^2}{2} \\ &= -\frac{1}{2} q_0 x^2 + (q_0 l - F) x + Fl - \frac{1}{2} q_0 l^2 \end{aligned} \quad (116)$$

**(d) Maximales Biegemoment**

Der Biegemomentenverlauf ist gegeben mit

$$M(x) = -\frac{1}{2} q_0 x^2 + \frac{1}{2} q_0 l x \quad (117)$$

Finde lokale Extrema:  $M'(x_{lm}) \stackrel{!}{=} 0$

$$M'(x_{lm}) = -q_0 x_{lm} + \frac{1}{2} q_0 l \stackrel{!}{=} 0 \quad (118)$$

$$\Rightarrow x_{lm} = \frac{l}{2} \quad (119)$$

Überprüfen der Randwerte liefert:  $M(0) = 0$  und  $M(l) = 0$ .

Das maximale Biegemoment ist also

$$\underline{\underline{M_{\max} = M(x = x_{lm}) = \frac{1}{8} q_0 l^2}} \quad (120)$$

**(e) Biegelinie im Bereich  $\overline{AG}$**

$$\begin{aligned} EI w''(x) &= -M(x) \\ &= \frac{1}{2} q_0 x^2 - \frac{1}{2} q_0 l x \end{aligned} \quad (121)$$

$$EI w'(x) = \frac{1}{6} q_0 x^3 - \frac{1}{4} q_0 l x^2 + C_1 \quad (122)$$

$$EI w(x) = \frac{1}{24} q_0 x^4 - \frac{1}{12} q_0 l x^3 + C_1 x + C_2 \quad (123)$$

Randbedingungen zum Lösen der Konstanten:

$$w(0) = 0 \quad \Rightarrow C_2 = 0 \quad (124)$$

$$w'(0) = 0 \quad \Rightarrow C_1 = 0 \quad (125)$$

Es folgt für die Biegelinie

$$\underline{\underline{w(x) = \frac{q_0 l^4}{12EI} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{x}{l} \right)^4 - \left( \frac{x}{l} \right)^3 \right]}} \quad (126)$$