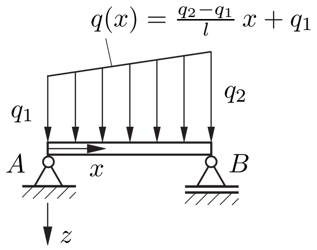
Tutorium

Aufgabe 97

(a)



Es handelt sich um ein *statisch bestimmtes* System, d.h. man kann alleine mit den Gleichgewichtsbedingungen oder den Schnittlastendifferentialgleichungen das Schnittmoment bestimmen. Dieses ist proportional zur linearen Krümmung.[1] Durch anschließende zweimalige Integration erhält man die Biegelinie.

Die folgende Lösung beinhaltet die viermalige Integration der Biegeliniendifferentialgleichung, die auch bei *statisch unbestimmten* Systemen zur Anwendung kommt:

$$q(x) = EIw''''(x) = \frac{q_2 - q_1}{l}\, x + q_1 \tag{1}$$

$$-Q(x) = EIw'''(x) = \frac{q_2 - q_1}{l} \frac{x^2}{2} + q_1 x + C_1 \tag{2}$$

$$-M(x) = EIw''(x) = \frac{q_2 - q_1}{l} \frac{x^3}{6} + q_1 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \tag{3}$$

$$EIw'(x) = \frac{q_2 - q_1}{l} \frac{x^4}{24} + q_1 \frac{x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \tag{4}$$

$$EIw(x) = \frac{q_2 - q_1}{l} \frac{x^5}{120} + q_1 \frac{x^4}{24} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \tag{5}$$

Geometrische und physikalische Randbedingungen:

$$M(x=0) = 0 \tag{6}$$

$$M(x=l) = 0 \tag{7}$$

$$w(x=0) = 0 \tag{8}$$

$$w(x=l) = 0 \tag{9}$$

$$(6) \;\rightarrow\; C_2 = 0 \tag{10}$$

$$(7) \;\rightarrow\; (q_2 - q_1)\frac{l^2}{6} + q_1 \frac{l^2}{2} + C_1 l = 0$$

$$\rightarrow\; \underline{C_1 = -\frac{q_1 l}{3} - \frac{q_2 l}{6}} \tag{11}$$

$$(8) \;\rightarrow\; C_4 = 0 \tag{12}$$

$$(9) \;\rightarrow\; (q_2 - q_1)\frac{l^4}{120} + q_1 \frac{l^4}{24} - \frac{q_1 l}{3}\frac{l^3}{6} - \frac{q_2 l}{6}\frac{l^3}{6} + C_3 l = 0 \tag{13}$$

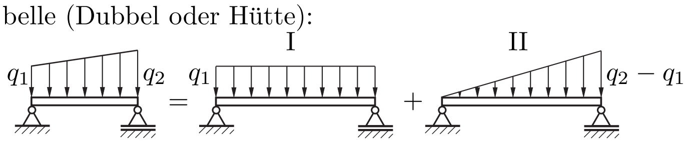
$$\frac{q_2 l^3}{120} - \frac{q_1 l^3}{120} + \frac{q_1 l^3}{24} - \frac{q_1 l^3}{18} - \frac{q_2 l^3}{36} + C_3 = 0 \tag{14}$$

$$\rightarrow\; \underline{C_3 = \frac{q_1 l^3}{45} + \frac{7 q_2 l^3}{360}} \tag{15}$$

$\rightarrow$ Biegelinie:

$$w(x) = \frac{l^4}{360\,EI}\Big[3(q_2 - q_1)\Big(\frac{x}{l}\Big)^5 + 15 q_1 \Big(\frac{x}{l}\Big)^4 - (20 q_1 + 10 q_2)\Big(\frac{x}{l}\Big)^3 + (8 q_1 + 7 q_2)\Big(\frac{x}{l}\Big)\Big] \tag{16}$$

Als Alternative und zum Vergleich hier der Lösungsweg mit Hilfe der Superpostion von Biegelinien aus einer Tabelle (Dubbel oder Hütte):



$$\mathrm{I}: \quad w_{\mathrm{I}}(x) = \frac{q_1 l^4}{24\,EI}\Big[\Big(\frac{x}{l}\Big)^4 - 2\Big(\frac{x}{l}\Big)^3 + \Big(\frac{x}{l}\Big)\Big] \tag{17}$$

$$\mathrm{II}: \quad w_{\mathrm{II}}(x) = \frac{(q_2 - q_1) l^4}{360\,EI}\Big[3\Big(\frac{x}{l}\Big)^5 - 10\Big(\frac{x}{l}\Big)^3 + 7\Big(\frac{x}{l}\Big)\Big] \tag{18}$$

$$\begin{aligned} w_{\mathrm{ges}}(x) &= w_{\mathrm{I}}(x) + w_{\mathrm{II}}(x) \\ &= \frac{l^4}{360\,EI}\Big[15 q_1 \Big(\frac{x}{l}\Big)^4 - 30 q_1 \Big(\frac{x}{l}\Big)^3 + 15 q_1 \Big(\frac{x}{l}\Big) \\ &\quad + 3(q_2 - q_1)\Big(\frac{x}{l}\Big)^5 - 10(q_2 - q_1)\Big(\frac{x}{l}\Big)^3 \\ &\quad + 7(q_2 - q_1)\Big(\frac{x}{l}\Big)\Big] \end{aligned} \tag{19}$$

$$w_{\mathrm{ges}}(x) = \frac{l^4}{360\,EI}\Big[3(q_2 - q_1)\Big(\frac{x}{l}\Big)^5 + 15 q_1 \Big(\frac{x}{l}\Big)^4 - (20 q_1 + 10 q_2)\Big(\frac{x}{l}\Big)^3 + (8 q_1 + 7 q_2)\Big(\frac{x}{l}\Big)\Big] \tag{20}$$

(b) Um die maximale Durchsenkung zu ermitteln, muß die Gleichung $w'(x_{\mathrm{ext}}) = 0$ gelöst werden, z.B numerisch für konkrete Werte q_1 und q_2. Dann läßt sich das Extremum der Durchsenkung $w_{\max} = w(x_{\mathrm{ext}})$ bestimmen. Die so gewonnenen relativen Extrema müssen dann noch mit den Werten an den Intervallgrenzen verglichen werden. Da diese im vorliegenden Fall Null sind, reduziert sich die Berechnung absoluter Extrema auf die Berechnung relativer Extremwerte.

---

[1] Material-Strukturgleichung für den Biegebalken: $M = -EIw''$, $w'' \approx$ Krümmung.

Aufgabe 100

Die Absenkung $\hat{w}$ des Kragträgers am rechten Ende entspricht dem Wert $\hat{w} := w(x_2 = l)$ unter Berücksichtigung der Bereichseinteilung (Bereich I: $0 \leq x_1 \leq l$, Bereich II: $0 \leq x_2 \leq l$). Um die Biegelinie $w(x)$ für beide Bereiche berechnen zu können, kann beispielsweise für jeden Bereich die Biegeliniendifferentialgleichung 4. Ordnung

$$EIw^{IV}(x_{1,2}) = q(x) \tag{21}$$

angewendet werden. Damit gilt für Bereich I:

$$EIw^{IV}(x_1) = 0 \tag{22}$$
$$EIw'''(x_1) = C_1 \tag{23}$$
$$EIw''(x_1) = C_1 x_1 + C_2 \tag{24}$$
$$EIw'(x_1) = \frac{1}{2} C_1 {x_1}^2 + C_2 x_1 + C_3 \tag{25}$$
$$EIw(x_1) = \frac{1}{6} C_1 {x_1}^3 + \frac{1}{2} C_2 {x_1}^2 + C_3 x_1 + C_4 \tag{26}$$

und für Bereich II

$$EIw^{IV}(x_2) = q_0 \tag{27}$$
$$EIw'''(x_2) = q_0 x_2 + C_5 \tag{28}$$
$$EIw''(x_2) = \frac{1}{2} q_0 {x_2}^2 + C_5 x_2 + C_6 \tag{29}$$
$$EIw'(x_2) = \frac{1}{6} q_0 {x_2}^3 + \frac{1}{2} C_5 {x_2}^2 + C_6 x_2 + C_7 \tag{30}$$
$$EIw(x_2) = \frac{1}{24} q_0 {x_2}^4 + \frac{1}{6} C_5 {x_2}^3 + \frac{1}{2} C_6 {x_2}^2 + C_7 x_2 + C_8 \tag{31}$$

Nun müssen noch alle acht geometrischen und physikalischen Rand- und Übergangsbedingungen für den Kragträger bestimmt werden, um die acht Integrationskonstanten berechnen zu können. Die geometrischen Rand und Übergangsbedingungen lauten:

$$w(x_1 = 0) = 0 \tag{32}$$
$$w'(x_1 = 0) = 0 \tag{33}$$
$$w(x_1 = l) = w(x_2 = 0) \tag{34}$$
$$w'(x_1 = l) = w'(x_2 = 0) \tag{35}$$

und die physikalischen lauten

$$w'''(x_1 = l) = w'''(x_2 = 0) \tag{36}$$
$$w''(x_1 = l) = w''(x_2 = 0) \tag{37}$$
$$w'''(x_2 = l) = 0 \tag{38}$$
$$w''(x_2 = l) = 0 \tag{39}$$

In Worten formuliert bedeutet dies, dass am Übergang von Bereich I zu Bereich II die Verschiebung und der Biegewinkel des Balkens sowie Querkraft und Biegemoment stetig sind. Am rechten Ende des Balkens sind Querkraft und Biegemoment offenbar Null und am linken Ende, der festen Einspannung, sind Verschiebung und Biegewinkel Null.

Die Bedingungen (32) bis (39) müssen nun in die Gleichungen (22) bis (31) eingesetzt werden, was zu einem Gleichungssystem mit acht Gleichungen und den acht unbekannten Integrationskonstanten C_1 bis C_8 führt. Nach nicht ganz trivialer Rechnung folgt dann schließlich

$$\boxed{C_1 = -lq_0} \tag{40}$$
$$\boxed{C_2 = \frac{3}{2} l^2 q_0} \tag{41}$$
$$\boxed{C_3 = 0} \tag{42}$$
$$\boxed{C_4 = 0} \tag{43}$$
$$\boxed{C_5 = -lq_0} \tag{44}$$
$$\boxed{C_6 = \frac{1}{2} l^2 q_0} \tag{45}$$
$$\boxed{C_7 = l^3 q_0} \tag{46}$$
$$\boxed{C_8 = \frac{7}{12} l^4 q_0} \tag{47}$$

und somit für die Biegelinie im Bereich II:

$$w(x_2) = \frac{1}{EI} \left(\frac{q_0}{24} {x_2}^4 - \frac{q_0 l}{6} {x_2}^3 + \frac{q_0 l^2}{4} {x_2}^2 + q_0 l^3 x_2 + \frac{7}{12} q_0 l^4 \right) \tag{48}$$

Die Durchsenkung am rechten Ende ergibt sich dann schließlich zu:

$$\boxed{\hat{w} = w(x_2 = l) = \frac{41}{24} \frac{q_0 l^4}{EI}} \tag{49}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 96

(a) Mit der Streckenlast

$$q(x) = q_0\left(1 - \frac{x}{l}\right) \tag{50}$$

und konstanter Biegesteifigkeit EI lautet die Diff'gl. der Biegelinie und ihre allg. Lösung:

$$EIw''''(x) = q(x) = q_0\Big[1 - \Big(\frac{x}{l}\Big)\Big] \tag{51}$$

$$EIw'''(x) = q_0 l\Big[-\frac{1}{2}\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 + \Big(\frac{x}{l}\Big) + C_1\Big] \tag{52}$$

$$EIw''(x) = q_0 l^2\Big[-\frac{1}{6}\Big(\frac{x}{l}\Big)^3 + \frac{1}{2}\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 + C_1\Big(\frac{x}{l}\Big) + C_2\Big] \tag{53}$$

$$EIw'(x) = q_0 l^3\Big[-\frac{1}{24}\Big(\frac{x}{l}\Big)^4 + \frac{1}{6}\Big(\frac{x}{l}\Big)^3 + \frac{1}{2}C_1\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 + C_2\Big(\frac{x}{l}\Big) + C_3\Big] \tag{54}$$

$$EIw(x) = q_0 l^4\Big[-\frac{1}{120}\Big(\frac{x}{l}\Big)^5 + \frac{1}{24}\Big(\frac{x}{l}\Big)^4 + \frac{1}{6}C_1\Big(\frac{x}{l}\Big)^3 + \frac{1}{2}C_2\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 + C_3\Big(\frac{x}{l}\Big) + C_4\Big] \tag{55}$$

Randbedingungen:

$$w(0) = 0\,, \qquad M(0) = -EIw''(0) = 0\,, \tag{56}$$

$$w(l) = 0\,, \qquad w'(l) = 0 \tag{57}$$

Bestimmung der Konstanten:

Aus (56) folgt:

$$C_4 = 0\,, \qquad C_2 = 0 \tag{58}$$

Aus (57) folgt:

$$-\frac{1}{120} + \frac{1}{24} + \frac{1}{6}C_1 + \frac{1}{2}C_2 + C_3 + C_4 = 0 \tag{59}$$

$$-\frac{1}{24} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}C_1 + C_2 + C_3 = 0 \tag{60}$$

mit Gln. (58) in Matrixform:

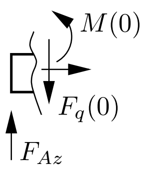
$$\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \tag{61}$$

$$\Rightarrow C_1 = -\frac{11}{40}\,, \qquad C_3 = \frac{1}{80} \tag{62}$$

Daraus ergibt sich die Biegelinie:

$$w(x) = \frac{q_0 l^4}{EI}\Big[-\frac{1}{120}\Big(\frac{x}{l}\Big)^5 + \frac{1}{24}\Big(\frac{x}{l}\Big)^4 - \frac{11}{240}\Big(\frac{x}{l}\Big)^3 + \frac{1}{80}\Big(\frac{x}{l}\Big)\Big] \tag{63}$$

(b)



Die nach oben pos. gezählte Auflagerkraft F_{Az} ergibt sich aus der Freischnittsskizze zu

$$F_{Az} = F_q(0) = -EIw'''(0) \tag{64}$$

$$= -q_0 l C_1 = \frac{11}{40}q_0 l \tag{65}$$

(c) Suche lokale Extrema der Funktion des Biegemoments:

$$M'(\tilde{x}) \stackrel{!}{=} 0 \tag{66}$$

$$\Rightarrow\ F_q(\tilde{x}) = -EIw'''(\tilde{x}) = 0 \tag{67}$$

$$-\frac{1}{2}\Big(\frac{\tilde{x}}{l}\Big)^2 + \Big(\frac{\tilde{x}}{l}\Big) + C_1 = 0 \tag{68}$$

Mit C_1 aus (62) ergibt sich:

$$\Big(\frac{\tilde{x}}{l}\Big)_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{11}{20}} \tag{69}$$

davon ist nur die zweite Lösung im Bereich $0 < x < l$:

$$\Big(\frac{\tilde{x}}{l}\Big) = 1 - \sqrt{\frac{9}{20}} = 1 - \frac{3\sqrt{5}}{10} \approx 0{,}329 \tag{70}$$

Vergleich mit den Randwerten: Die Funktion $M(x)$ hat im Bereich $0 \le x \le l$ genau ein Extremum (bei $\tilde{x}$). Am linken Rand ist das Moment gleich Null. Es ist also der Wert $M(\tilde{x})$ zu vergleichen mit $M(l)$.

$$M(\tilde{x}) = \frac{18\sqrt{\frac{9}{20}} - 7}{120}q_0 l^2 \approx 0{,}0423 q_0 l^2 \tag{71}$$

$$M(l) = -\frac{7}{120}q_0 l^2 \approx \text{-}0{,}0583 q_0 l^2 \tag{72}$$

Das absolute Maximum tritt also bei $\hat{x} = l$ auf.

Alternative allg. Lösung und Konstanten: Aus

$$EIw(x) = -\frac{q_0}{120l}x^5 + \frac{q_0}{24}x^4 + \frac{A_1}{6}x^3 + \frac{A_2}{2}x^2 + A_3 x + A_4 \tag{73}$$

ergibt sich mit den Randbedingungen (56)

$$A_4 = 0\,, \qquad A_2 = 0 \tag{74}$$

und mit den Randbedingungen (57):

$$-\frac{q_0}{120}l^4 + \frac{q_0}{24}l^4 + \frac{A_1}{6}l^3 + A_3 l = 0 \tag{75}$$

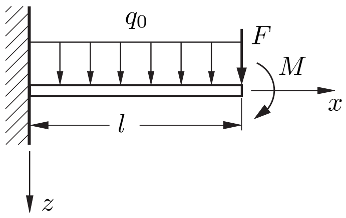
$$-\frac{q_0}{24}l^3 + \frac{q_0}{6}l^3 + \frac{A_1}{2}l^2 + A_3 = 0 \tag{76}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{l^2}{6} & 1 \\ \frac{l^2}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{q_0 l^3}{30} \\ -\frac{q_0 l^3}{8} \end{bmatrix} \tag{77}$$

$$\Rightarrow A_1 = -\frac{11}{40}q_0 l\,, \qquad A_3 = \frac{1}{80}q_0 l^3 \tag{78}$$

Eingestzt in Gl. (73) ergibt sich wieder die Lösung Gl. (63).

Aufgabe 99

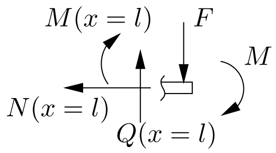


Biegelinie:

$$EI\,w''''(x) = q_0 \tag{79}$$
$$EI\,w'''(x) = q_0 \cdot x + C_1 \tag{80}$$
$$EI\,w''(x) = \frac{1}{2} q_0 x^2 + C_1 x + C_3 \tag{81}$$
$$EI\,w'(x) = \frac{1}{6} q_0 x^3 + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3 \tag{82}$$
$$EI\,w(x) = \frac{1}{24} q_0 x^4 + \frac{C_1}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4 \tag{83}$$

Randbedingung:

$$1) \quad w(0) = 0 \tag{84}$$
$$2) \quad w'(0) = 0 \tag{85}$$



$$3)\ EI\,w''(x=l) = -M(x=l) = M \tag{86}$$
$$4)\ EI\,w'''(x=l) = -Q(x=l) = -F \tag{87}$$

$$1) \Rightarrow C_4 = 0 \qquad 2) \Rightarrow C_3 = 0 \tag{88}$$
$$3), 4) \Rightarrow C_2 = M + Fl + \frac{1}{2} q_0 l^2;\ C_1 = -F - q_0 l \tag{89}$$

$\hat{w}$ ist die Durchsenkung $w(l)$ am rechten Rand ($x = l$). S. Gl. (83):

$$\hat{w} = w(l) = \frac{1}{EI}\Big[\frac{1}{24} q_0 l^4 + \big(M + Fl + \frac{1}{2} q_0 l^2\big) \cdot \frac{l^2}{2}$$
$$+ \frac{l^3}{6}\big(-F - q_0 l\big)\Big] \tag{90}$$
$$= \frac{1}{EI}\Big(\frac{Ml^2}{2} + \frac{1}{3} F \cdot l^3 + \frac{1}{8} q_0 l^4\Big)$$
$$\stackrel{!}{=} \frac{Fl^3}{3EI} + \frac{Ml^2}{2EI} + \frac{q_0 l^4}{8EI} \tag{91}$$

$\varphi(x) = w'(x)$, Biegewinkel am rechten Rand: $\hat{\varphi} = w'(l)$ aus Gl. (82):

$$\varphi(l) = \frac{1}{EI}\Big[\frac{1}{6} q_0 l^3 + \big(M + F\,l + \frac{1}{2} q_0 l^2\big) l \tag{92}$$
$$+ \frac{l^2}{2}(-F - q_0 l)\Big] \tag{93}$$
$$\hat{\varphi} = \frac{1}{EI}\Big(Ml + \frac{Fl^2}{2} + \frac{q_0 l^3}{6}\Big)$$
$$\stackrel{!}{=} \frac{F\,l^2}{2EI} + \frac{M\,l}{EI} + \frac{q_0 l^3}{6EI} \tag{94}$$