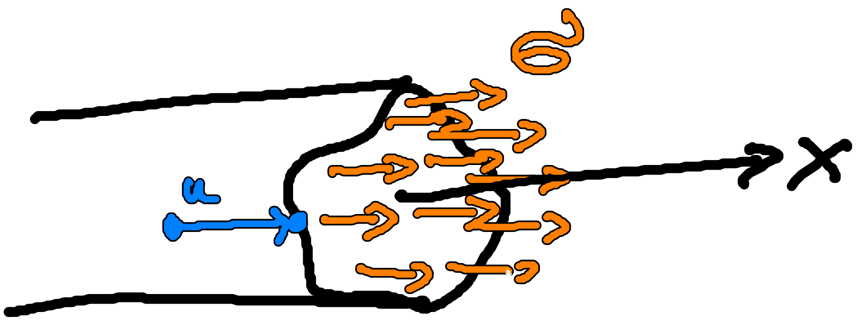
Einleitung
Zug/Druck

Spannung

zunächst reiner Zug/Druck,
keine Querkräfte, keine Momente



$$N = \int \sigma \, dA$$

$$\Leftrightarrow \sigma = \frac{N}{A}$$

Dehnung

Körper sind nicht mehr starr,
sondern deformierbar.

$$\varepsilon = \frac{du(x)}{dx}$$

gilt für homogenen Fall

$$= \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta l}{l}$$

Materialgesetz

Zusammenhang Spannung-Dehnung
Für kleine Verformungen gilt für viele Materialien Proportionalität $\sigma \sim \varepsilon$

$$\sigma = E\,\varepsilon$$ HOOKEsches Gesetz

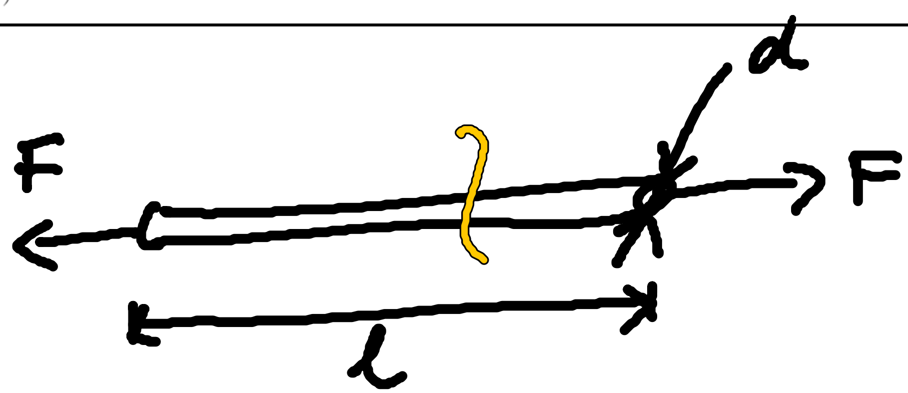
E: Elastizitätsmodul

Ein Stab der Länge $l = 10$ cm mit kreisförmigem Querschnitt (Durchmesser $d = 2$ cm) verlängert sich unter der Einwirkung einer Längskraft $F = 5$ kN um $\Delta l = 0,2$ mm.

(a) Wie groß ist die Dehnung ε des Stabes?

(b) Welche Spannung σ herrscht im Stab?

(c) Kann der Stab aus Stahl sein?



a) $$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{\Delta l}{l}$$

$$= \frac{0{,}2\ \text{mm}}{10\ \text{cm}} = \frac{0{,}2\ \cancel{\text{mm}}}{100\ \cancel{\text{mm}}} = \underline{0{,}002}$$

$$\hat{=}\ 0{,}2\ \%$$

b) $$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{F}{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{5\ \text{kN}}{\pi\ 1\ \text{cm}^2} = \frac{5}{\pi}\ \frac{\cdot 10^3\ \text{N}}{10^{-4}\ \text{m}^2}$$

$$= \frac{5}{\pi}\ 10^7 \underbrace{\frac{\text{N}}{\text{m}^2}}_{\text{Pa}} = \frac{50}{\pi} \underbrace{\cdot 10^6\ \text{Pa}}_{\text{MPa}}$$

$$= \underline{15{,}9\ \text{MPa}}$$

c) Material des Stabes?

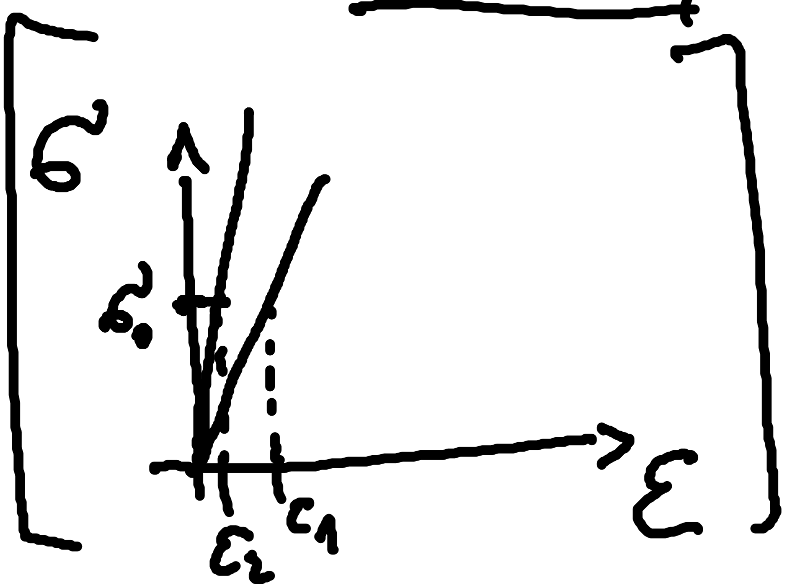
HOOKEsches Gesetz:

$$\sigma = E\,\varepsilon$$

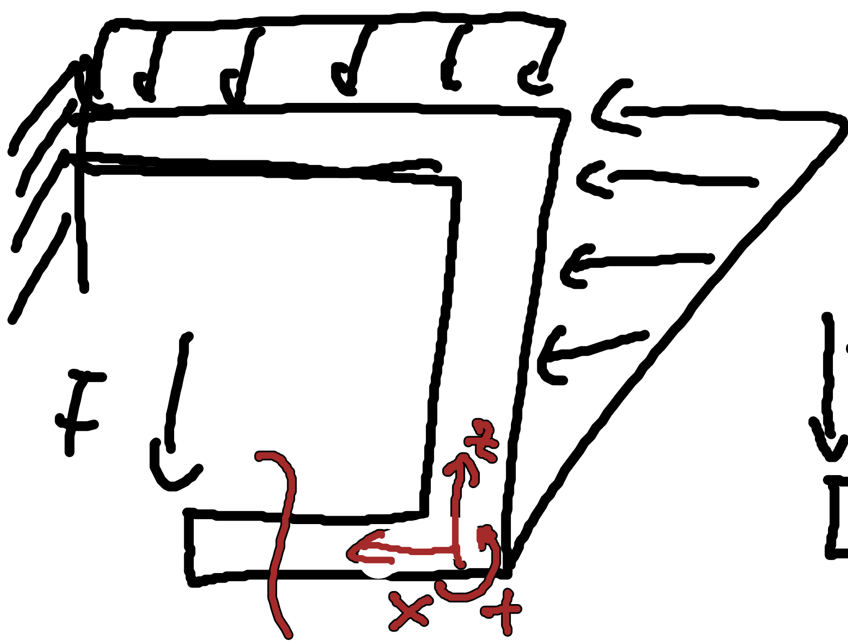
$$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{15{,}9\ \text{MPa}}{0{,}002}$$

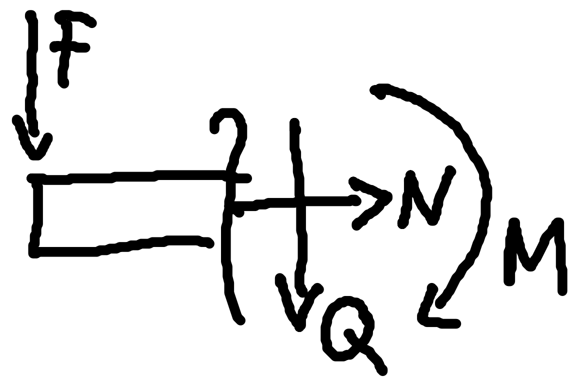
$$= \underline{8\ \text{GPa}}$$

$E_{Stahl} = 210\ \text{GPa}$



→ z.B. Holz

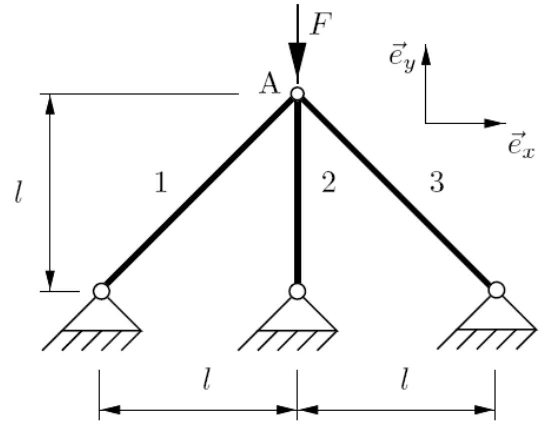




A76

Das gezeigte ebene, symmetrische Dreibein besteht aus drei elastischen Stäben. Alle drei Stäbe haben den E-Modul E. Die Stäbe 1 und 3 haben die Querschnittsfläche A, Stab 2 hat die Querschnittsfläche $2A$.

Das Dreibein wird im oberen Gelenkpunkt, in dem alle Stäbe gelenkig verbunden sind, durch eine Kraft F belastet. Knicken der Stäbe sei ausgeschlossen. Die Verformungen sind sehr klein und rein elastisch.



(a) Berechnen Sie die Stabkräfte S_1, S_2 und S_3.

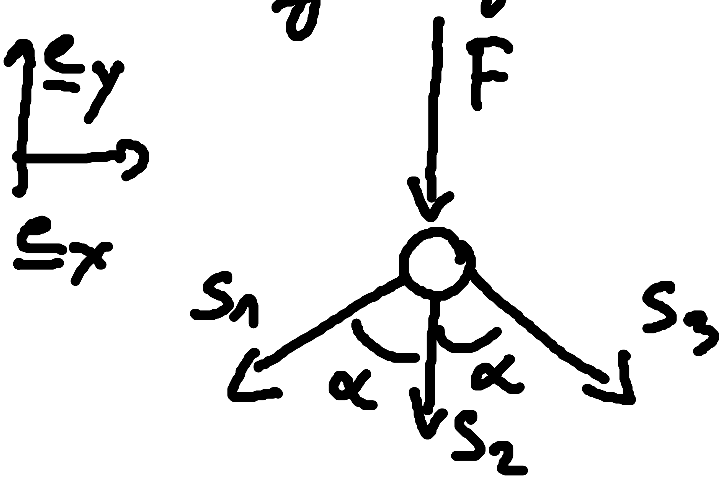
(b) Wie groß ist die Verschiebung $\vec{u}_A$ des Punktes A?

Geg.: F, E, A, l

a) Stabkräfte

statisch bestimmt? nein.

nutze <u>Gleichgewichtsbedingungen</u>:



$$\sum F_x = \frac{1}{\sqrt{2}} S_3 - \frac{1}{\sqrt{2}} S_1 = 0$$

$$\Rightarrow S_1 = S_3 \quad (1)$$

$\alpha = 45°$

$$\sum F_y = -F - S_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} S_3 - \frac{1}{\sqrt{2}} S_1 = 0$$

$\Rightarrow F + S_2 = -\frac{2}{\sqrt{2}} S_1 \quad (2)$

---

2 Gln, 3 Unbekannte (S_1, S_2, S_3) :(

HOOKEsches Gesetz: $\sigma = E\varepsilon = \frac{N}{A}$

$1: \frac{N_1}{A_1} = E_1 \frac{\Delta l_1}{l_1}$

$E_1 = E_2 = E_3$

$A_1 = A_3 = A$

$A_2 = 2A$

$l_1 = l_3 = \sqrt{2}\, l$

$l_2 = l$

$$\frac{S_1}{A} = E \frac{\Delta l_1}{\sqrt{2}\, l} \quad (3)$$

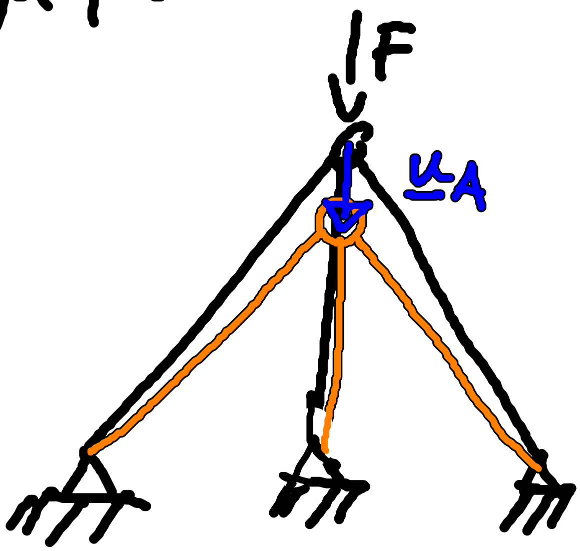
$$\frac{S_2}{2A} = E \frac{\Delta l_2}{l} \quad (4)$$

$$\frac{S_3}{A} = E \frac{\Delta l_3}{\sqrt{2}\, l} \quad (5)$$

3 neue Gln,
3 neue Unbekannte
(Δl_i) :(

Gibt es einen Zusammenhang zwischen den Δl_i?

Ja, über die Verformungskinematik.



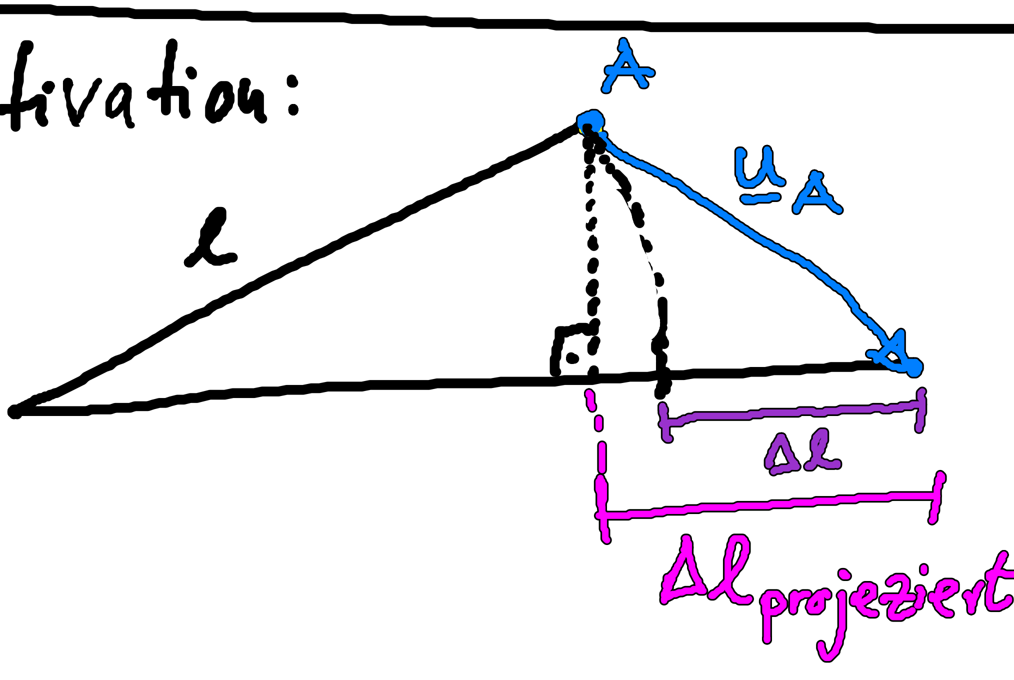
linearisierte Kinematik:

$$\underline{u}_A \cdot \underline{e}_i = \Delta l_i$$

$\underline{u}_A$ Verschiebungsvektor

$\underline{e}_i$ Einheitsvektoren in Stabrichtung

Motivation:



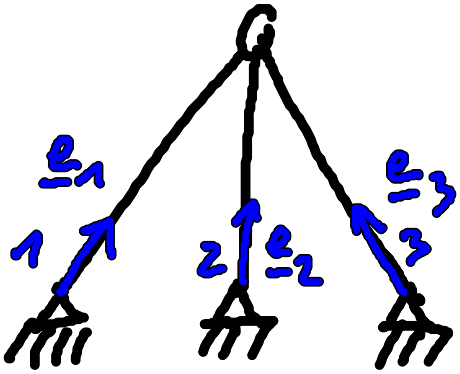
Für kleine Verformungen $\Delta l \approx \Delta l_{projeziert}$

Einheitsvektoren $\underline{e}_i$

$$\underline{e}_1 = (l\,\underline{e}_x + l\,\underline{e}_y)\overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}\,l}}^{\text{damit } |\underline{e}_i| = 1}$$

$$\underline{e}_2 = \underline{e}_y$$

$$\underline{e}_3 = (-l\,\underline{e}_x + l\,\underline{e}_y)\frac{1}{\sqrt{2}\,l}$$



$$\underline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}_y$$

$$\underline{e}_2 = \underline{e}_y$$

$$\underline{e}_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}_y$$

$$\underline{u}_A = u_{Ax}\underline{e}_x + u_{Ay}\underline{e}_y$$

$$\underline{u}_A \cdot \underline{e}_1 = u_{Ax}\frac{1}{\sqrt{2}} + u_{Ay}\frac{1}{\sqrt{2}} = \Delta l_1 \qquad (6)$$

$$\underline{u}_A \cdot \underline{e}_2 = u_{Ay} = \Delta l_2 \qquad (7)$$

$$\underline{u}_A \cdot \underline{e}_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}u_{Ax} + \frac{1}{\sqrt{2}}u_{Ay} = \Delta l_3 \qquad (8)$$

---

3 Gln, 2 neue Unbekannte (u_{Ax}, u_{Ay})

$\Rightarrow$ 8 Gln, 8 Unbekannte ☺

Lösen des 8x8 Gl.-Systems:

$$S_1 = -\frac{F}{(\sqrt{2}+4)} = S_3$$

$$S_2 = -\frac{4F}{(\sqrt{2}+4)}$$

b) $u_{Ax} = 0$ (aus Symmetrie)

$$u_{Ay} = -\frac{2Fl}{EA(\sqrt{2}+4)}$$

$$[u_{Ay}] = \frac{Nm}{\frac{N}{m^2}\, m^2} = m \checkmark$$