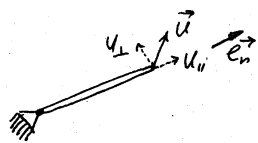


Statisch bestimmte und statisch unbestimmte elastische Stabsysteme

Literatur: Hauger, Schnell und Groß. Technische Mechanik 2 (Elastostatik), 1.5,1.6.

I. Hilfsaufgabe



Ein elastischer Stab sei an einem Ende in einem Festlager befestigt. Das andere Ende wird aus der Anfangslage um den Vektor \vec{u} verschoben.

Wie ändert sich die Länge des Stabes?

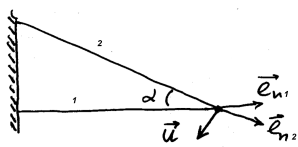
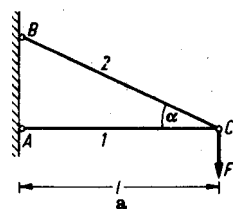
Lösung: Wenn die Verschiebung klein ist, so verursacht nur die Komponente der Verschiebung in der Stabrichtung eine Längenänderung: $\Delta l = u_{\parallel}$. Wenn wir einen

Einheitsvektor \vec{e}_n in der Stabrichtung einführen, kann man auch schreiben

$$\Delta l = \vec{u} \cdot \vec{e}_n$$

II. Statisch bestimmtes Stabwerk 1

Zwei Stäbe mit der gleichen Dehnsteifigkeit EA sind gelenkig gelagert und mit einander verbunden, wie im Bild gezeigt. Gesucht ist die Verschiebung des Knotens C .



Bezeichnen wir die Verschiebung des Knotens mit $\vec{u} = (u_x, u_y)$ und be-

stimmen die Einheitsvektoren in der Richtung des ersten und des zweiten Stabes:

$$\vec{e}_{n1} = (1, 0), \quad \vec{e}_{n2} = (\cos \alpha, -\sin \alpha).$$

Die Längenänderungen der beiden Stäbe sind dann

$$\left. \begin{aligned} \Delta l_1 &= \vec{u} \cdot \vec{e}_{n1} = (u_x, u_y) \cdot (1, 0) = u_x, \\ \Delta l_2 &= \vec{u} \cdot \vec{e}_{n2} = (u_x, u_y) \cdot (\cos \alpha, -\sin \alpha) \\ &= u_x \cos \alpha - u_y \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Die Stabkräfte sind somit

$$S_1 = \frac{EA}{l_1} \Delta l_1, \quad S_2 = \frac{EA}{l_2} \Delta l_2. \quad (2)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen lassen sich in der folgenden Form schreiben:

$$x: -S_2 \cos \alpha - S_1 = 0,$$

$$y: S_2 \sin \alpha - F = 0.$$

Einsetzen von (2) liefert

$$-\frac{EA}{l_2} \Delta l_2 \cos \alpha - \frac{EA}{l_1} \Delta l_1 = 0,$$

$$\frac{EA}{l_2} \Delta l_2 \sin \alpha - F = 0.$$

Einsetzen von (1) und Berücksichtigung, dass $l_2 = l_1 / \cos \alpha$, führt zum Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} -\frac{EA}{l_1} \cos \alpha (u_x \cos \alpha - u_y \sin \alpha) \cos \alpha - \frac{EA}{l_1} u_x &= 0 \\ \frac{EA}{l_1} \cos \alpha (u_x \cos \alpha - u_y \sin \alpha) \sin \alpha - F &= 0 \end{aligned} \right\}$$

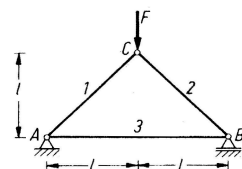
oder

$$\left. \begin{aligned} u_x (1 + \cos^3 \alpha) - u_y \sin \alpha \cos^2 \alpha &= 0 \\ u_x \sin \alpha \cos^2 \alpha - u_y \sin^2 \alpha \cos \alpha &= \frac{Fl_1}{EA} \end{aligned} \right\}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} u_x &= -\frac{Fl_1}{EA} \frac{1}{\tan \alpha} \\ u_y &= -\frac{Fl_1 \cos \alpha}{EA \sin \alpha} \frac{1 + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha \cos^2 \alpha} = -\frac{Fl_1}{EA} \frac{1 + \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos \alpha} \end{aligned}$$

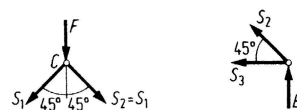
III. Statisch bestimmtes Stabwerk 2



Ein Fachwerk, das aus drei Stahlstäben besteht, wird durch die Kraft $F = 20 \text{ kN}$ belastet. Wie groß müssen die Querschnittsflächen mindestens sein, wenn die Spannungen nicht größer als $\sigma_{zul} = 150 \text{ MPa}$ und die Verschiebung des Lagers B kleiner als $0,05\%$ der Länge des Stabes 3 sein sollen?

Lösung. Da das Stabwerk statisch bestimmt ist, kann man die Stabkräfte direkt aus den

Gleichgewichtsbedingungen bestimmen.



$$S_1 = S_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} F,$$

$$S_3 = \frac{F}{2}.$$

Damit die zulässige Spannung nicht überschritten wird, muss gelten:

$$|\sigma_1| = \frac{|S_1|}{A_1} \leq \sigma_{zul}, \quad |\sigma_2| = \frac{|S_2|}{A_2} \leq \sigma_{zul}, \quad |\sigma_3| = \frac{|S_3|}{A_3} \leq \sigma_{zul}$$

Daraus folgt für die mindestens erforderlichen Querschnittsflächen

$$A_1 = A_2 = \frac{|S_1|}{\sigma_{zul}} = \frac{0,707 \cdot 20 \cdot 10^3}{150 \cdot 10^6} [\text{m}^2] = 94,3 \text{ mm}^2$$

$$A_3 = \frac{|S_3|}{\sigma_{zul}} = \frac{0,5 \cdot 20 \cdot 10^3}{150 \cdot 10^6} [\text{m}^2] = 66,7 \text{ mm}^2.$$

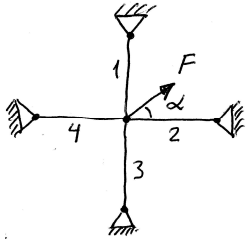
Aus dem Hookeschen Gesetz für Stab 3 folgt:

$$\frac{|S_3|}{A_3} = E \frac{|\Delta l_3|}{l_3} \quad \text{und wir erhalten}$$

$$A_3 = \frac{|S_3|}{E(|\Delta l_3|/l_3)} \geq \frac{0,5 \cdot 20 \cdot 10^3}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}} [\text{m}^2]$$

$$= 9,5 \cdot 10^{-5} [\text{m}^2] = 95 \text{ mm}^2$$

IV. Statisch unbestimmtes Stabwerk 1



Gegeben sind die Steifigkeiten c der Stäbe. Zu berechnen ist die Verschiebung des Knotens. Wir führen den Verschiebungsvektor und die Einheitsvektoren ein:

$$\vec{u} = (u_x, u_y),$$

$$\vec{e}_1 = (0, -1), \quad \vec{e}_2 = (-1, 0),$$

$$\vec{e}_3 = (0, 1), \quad \vec{e}_4 = (1, 0).$$

Die Längenänderungen sind

$$\Delta l_1 = \vec{u} \cdot \vec{e}_1 = (u_x, u_y) \cdot (0, -1) = -u_y$$

$$\Delta l_2 = \vec{u} \cdot \vec{e}_2 = (u_x, u_y) \cdot (-1, 0) = -u_x$$

$$\Delta l_3 = \vec{u} \cdot \vec{e}_3 = (u_x, u_y) \cdot (0, 1) = u_y$$

$$\Delta l_4 = \vec{u} \cdot \vec{e}_4 = (u_x, u_y) \cdot (1, 0) = u_x$$

Für die Stabkräfte ergibt sich

$$S_1 = c \Delta l_1 = -c u_y$$

$$S_2 = c \Delta l_2 = -c u_x$$

$$S_3 = c \Delta l_3 = c u_y$$

$$S_4 = c \Delta l_4 = c u_x$$

Kräftegleichge-

$$x: S_2 - S_4 + F \cos \alpha = 0$$

$$y: S_1 - S_3 + F \sin \alpha = 0$$

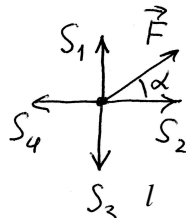
$$-c u_x - c u_x + F \cos \alpha = 0 \Rightarrow 2c u_x = F \cos \alpha$$

$$-c u_y - c u_y + F \sin \alpha = 0 \Rightarrow 2c u_y = F \sin \alpha$$

$$u_x = \frac{F}{2c} \cos \alpha = \frac{F_x}{2c}$$

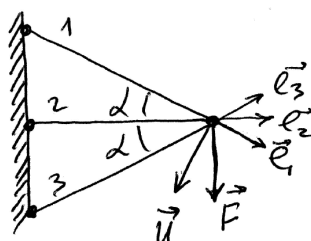
$$u_y = \frac{F}{2c} \sin \alpha = \frac{F_y}{2c}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{F}}{2c}$$



wicht:

V. Statisch unbestimmtes Stabwerk 2



Gegeben: l, EA, F .

Gesucht:

1. Stabkräfte

2. Verschiebungen

Bei $F=0$ sind alle Stäbe entspannt.

$$\vec{e}_1 = (\cos \alpha, -\sin \alpha)$$

$$\vec{e}_2 = (1, 0)$$

$$\vec{e}_3 = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

$$\Delta l_1 = \vec{u} \cdot \vec{e}_1 = (u_x, u_y) \cdot (\cos \alpha, -\sin \alpha)$$

$$= u_x \cos \alpha - u_y \sin \alpha$$

$$\Delta l_2 = \vec{u} \cdot \vec{e}_2 = (u_x, u_y) \cdot (1, 0) = u_x$$

$$\Delta l_3 = \vec{u} \cdot \vec{e}_3 = (u_x, u_y) \cdot (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

$$= u_x \cos \alpha + u_y \sin \alpha$$

$$S_1 = c_1 \Delta l_1 = c_1 (u_x \cos \alpha - u_y \sin \alpha)$$

$$S_2 = c_2 \Delta l_2 = c_2 u_x$$

$$S_3 = c_3 \Delta l_3 = c_3 (u_x \cos \alpha + u_y \sin \alpha)$$

Kräftegleichgewicht:

$$\left. \begin{aligned} x: -S_1 \cos \alpha - S_2 - S_3 \cos \alpha &= 0 \\ y: S_1 \sin \alpha - S_3 \sin \alpha - F &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$-c_1 (u_x \cos \alpha - u_y \sin \alpha) \cos \alpha - c_2 u_x$$

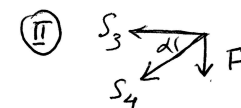
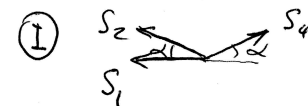
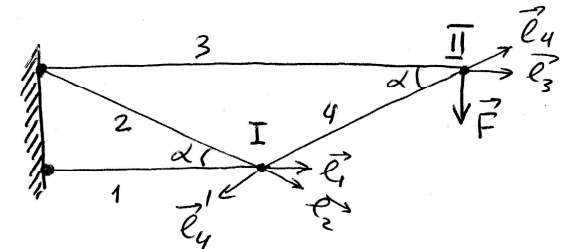
$$-c_3 (u_x \cos \alpha + u_y \sin \alpha) \cos \alpha = 0$$

$$c_1 (u_x \cos \alpha - u_y \sin \alpha) \sin \alpha$$

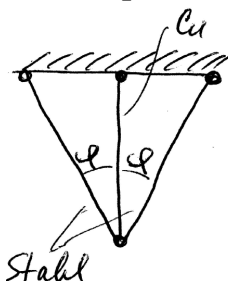
$$-c_3 (u_x \cos \alpha + u_y \sin \alpha) \sin \alpha - F = 0$$

VI. Statisch bestimmtes Stabwerk 3

Zu bestimmen sind die Verschiebungen beider Knoten



VII. Statisch unbestimmtes Stabwerk mit Wärmespannungen



$$\alpha(\text{Stahl}) = 1,2 \cdot 10^{-5} 1/\text{K}$$

$$\alpha(\text{Cu}) = 1,7 \cdot 10^{-5} 1/\text{K}$$

$$\Delta T = 100 \text{ K.}$$

Zu bestimmen sind die thermischen Spannungen.