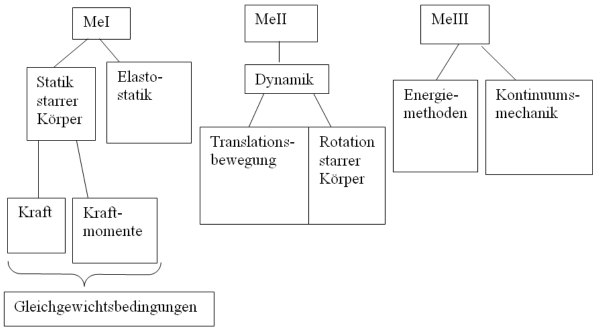
Mechanik I / Prof. Popov / Vorlesung 1. **Literatur:** ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 1 (Statik)**
Vektoren, Vektoralgebra, Skalarprodukt.
Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt, Kräftegleichgewicht.

I. Übersicht der Mechanik-Kurse

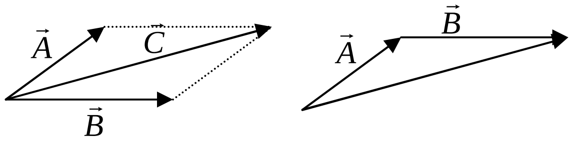


II. Skalare und Vektoren

Skalare: Temperatur, Masse, Anzahl der Gegenstände, Länge,...
Vektoren: Verschiebung, Kraft, Impuls, Geschwindigkeit, Beschleunigung,...
Bezeichnungen: $\mathbf{A}$, $\vec{A}$, $\bar{A}$, $\underline{A}$ oder einfach A

Betrag: $A = |\vec{A}| = |\mathbf{A}|$.

III. Summe von Vektoren $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$

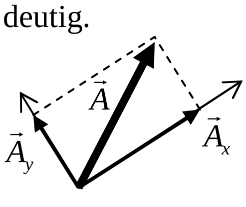


Vertauschbarkeit: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$.

Multiplikation mit einer Zahl:

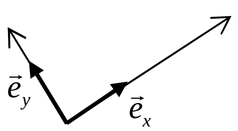
$$\vec{C} = \alpha\vec{A} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{C}| = \alpha|\vec{A}| \\ dieselbe\ \ Richtung \end{cases}$$

Zerlegung eines Vektors:
Jeder Vektor kann als Summe anderer Vektoren dargestellt werden. Diese Zerlegung wird durch die Wahl von Referenzrichtungen eindeutig.



$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$

$$= A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$$

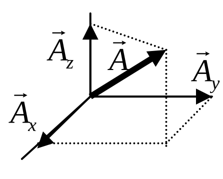


$|\vec{e}_x| = 1$, $|\vec{e}_y| = 1$.

$\vec{A}_x = A_x\vec{e}_x$, $\quad \vec{A}_y = A_y\vec{e}_y$.

Koordinaten (oder Komponenten) des Vektors

In drei Dimensionen:



$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z$$

$$= \begin{pmatrix} A_x & A_y & A_z \end{pmatrix}$$

Summe von Vektoren in Komponenten:

$$\vec{A} + \vec{B} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y$$

$$= (A_x + B_x)\vec{e}_x + (A_y + B_y)\vec{e}_y = \begin{pmatrix} A_x + B_x \\ A_y + B_y \end{pmatrix}$$

IV. Vektorielle Gleichungen

Was bedeutet die Gleichung $\vec{A} = \vec{B}$?

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} A_x = B_x \\ A_y = B_y \end{matrix}.$$

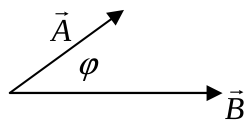
Was bedeutet die Gleichung $\vec{A} + \vec{B} = \vec{0}$?

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} A_x + B_x = 0 \\ A_y + B_y = 0 \end{matrix}.$$

Das Vektorzeichen beim Nullvektor wird oft weggelassen. Unter einer Null in einer Vektorgleichung wird immer ein Nullvektor verstanden.

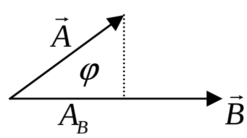
V. Produkte aus zwei Vektoren.

Es gibt drei Arten von Produkten, die sich nach dem Charakter des *Ergebnisses* unterscheiden.
Skalarprodukt (Ergebnis ist ein Skalar): Arbeit, Leistung.
Vektorprodukt (oder Kreuzprodukt) (Ergebnis ist ein Vektor): Magnetische Kraft, Kraftmoment, Drehimpuls.
Tensorprodukt (oder diadisches Produkt) (Ergebnis ist ein Tensor): Trägheitsmoment u.a.
Wir diskutieren jetzt nur das Skalarprodukt.
Definition des Skalarproduktes von zwei Vektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$:



$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv A \cdot B \cdot \cos\varphi}$$

Englische Bezeichnung: dot product



$A_B = A\cos\varphi$.

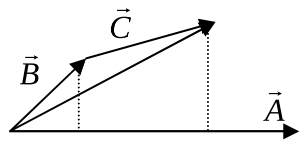
$\vec{A} \cdot \vec{B} = B \cdot A_B$

$= BA\cos\varphi = A \cdot B_A$

Eigenschaften des Skalarproduktes:

1) $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

2) $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$



$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C})$

$= A \cdot (\vec{B} + \vec{C})_A =$

$$= A\cdot\left(B_A + C_A\right) = A\cdot B_A + A\cdot C_A$$

$$= \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$$

3) $\vec{A}\perp\vec{B} \;\Rightarrow\; \vec{A}\cdot\vec{B}=0$

4) $\vec{A}\cdot\vec{A}=A^2$

VI. Skalarprodukt in Komponenten
Zwei Vektoren seien durch ihre kartesischen Komponenten gegeben:

$$\vec{A}=A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z\,,$$

$$\vec{B}=B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z\,.$$

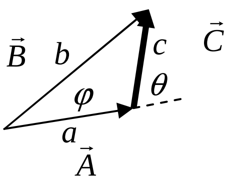
$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B}=A_x\cdot B_x + A_y\cdot B_y + A_z\cdot B_z}\,.$$

Für zwei gleiche Vektoren:

$\boxed{A^2 = A_x^{\;2} + A_y^{\;2} + A_z^{\;2}}$ (Satz des Pythagoras)

Benutzung des Skalarproduktes

B1. In einem Dreieck sind die Seiten *a, b* und der Winkel φ zwischen beiden bekannt. Zu bestimmen ist die dritte Seite und der Winkel θ.



<u>Lösung:</u> Wir führen Vektoren $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{C}$ ein. Es gilt: $\vec{C}=\vec{B}-\vec{A}$. Zur Bestimmung der Seite *c* berechnen wir das Skalarprodukt des Vektors $\vec{C}$ mit sich selbst: $c^2=\vec{C}\cdot\vec{C}=\left(\vec{B}-\vec{A}\right)^2=$

$$\vec{B}^2-2\vec{B}\cdot\vec{A}+\vec{A}^2=b^2-2ba\cos\varphi+a^2\,.$$

Somit ist $c=\sqrt{b^2-2ba\cos\varphi+a^2}$.

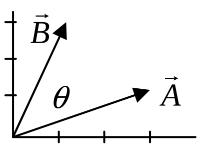
Um den Winkel θ zu bestimmen, berechnen wir das Skalarprodukt $\vec{A}\cdot\vec{C}=ac\cos\theta$. Daraus folgt

$$\cos\theta=\frac{\vec{A}\cdot\vec{C}}{ac}=\frac{\vec{A}\cdot\left(\vec{B}-\vec{A}\right)}{ac}=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}-\vec{A}^2}{ac}=$$

$$=\frac{ab\cos\varphi-a^2}{ac}=\frac{b\cos\varphi-a}{\sqrt{b^2-2ba\cos\varphi+a^2}}\,.$$

B2. Zwei Vektoren seien durch ihre Komponenten gegeben:

$$\vec{A}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},\ \vec{B}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}.$$



Zu bestimmen ist der Winkel zwischen den Vektoren.

<u>Lösung:</u> Aus der Definition des Skalarproduktes folgt: $\cos\varphi=\dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}=\dfrac{6}{10}=0{,}6$. $\boxed{\theta=53{,}13°}$

VII. Kraft ist einer der Grundbegriffe der Mechanik. Die Krafteinheit *Newton* [$N=kg\cdot m/s^2$] kommt aus der Dynamik. Die Kraft ist ein gebundener, linienflüchtiger **Vektor**. Am einfachsten ist der Fall, wo alle Kräfte an einem Punkt angreifen: *Zentrale Kräftegruppe.*

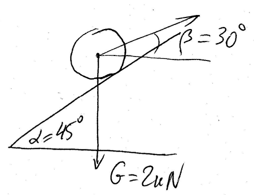
VIII. Gleichgewicht Ein starrer Körper ist im Gleichgewicht, wenn die auf ihn wirkende Kraft gleich Null ist: $\vec{F}=0$. Diese Gleichung ist äquivalent zu den *drei Gleichungen*:

$$F_x=0,\ F_y=0 \text{ und } F_z=0\,.$$

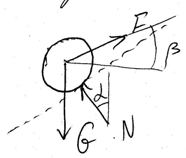
Oder: Die Summe aller an ihm angreifenden Kräfte ist gleich Null: $\vec{R}=\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{F}_i=\vec{0}$.

$$R_x=\sum_{i=1}^{n}F_{ix}=0,\ R_y=\sum_{i=1}^{n}F_{iy}=0,\ R_z=\sum_{i=1}^{n}F_{iz}=0\,.$$

IX. Einteilung der Kräfte:
- eingeprägte Kräfte
- Zwangs- oder Reaktionskräfte
Reaktionskräfte werden durch *Freischneiden* sichtbar gemacht. Das Bild mit den eingetragenen Kräften nennt man *Freikörperbild.*
Der Betrag der Reaktionskräfte ist von Anfang an nicht bekannt; die Richtung der Reaktionskräfte kann man dagegen in meisten Fällen leicht bestimmen. *Richtung der Reaktionskraft ist immer die Richtung, in der die Bewegung verhindert ist.*
B1. Eine Rolle (Gewicht G=2kN) wird auf einer schiefen Ebene (Neigungswinkel 45°) durch einen Faden (Neigungswinkel 30°) gehalten. Zu bestimmen ist die Spannkraft des Fadens und die Druckkraft auf die Ebene.



Freikörperbild:



x: $F\cos\beta-N\sin\alpha=0$

y: $F\sin\beta+N\cos\alpha-G=0$

$$\begin{cases}F\cos\beta\sin\beta-N\sin\alpha\sin\beta=0\\ F\sin\beta\cos\beta+N\cos\alpha\cos\beta=G\cos\beta\end{cases}$$

$$N\left(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\right)=G\cos\beta\,,$$

$$\boxed{\begin{aligned}N&=\frac{G\cos\beta}{\left(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\right)}=\frac{G\cos\beta}{\cos\left(\alpha-\beta\right)}.\\ F&=\frac{G\sin\alpha}{\left(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\right)}=\frac{G\sin\alpha}{\cos\left(\alpha-\beta\right)}.\end{aligned}}$$