

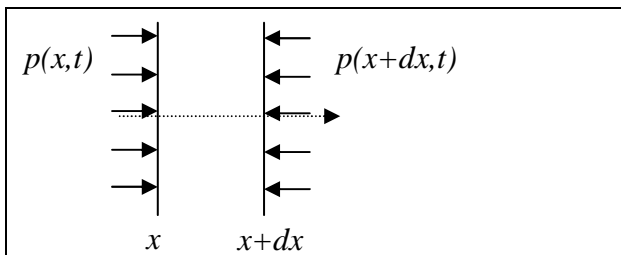
I. Wellengleichung

Die Ursache für die Schallausbreitung ist die Abhängigkeit $p = p(\rho)$ des Druckes von der Dichte: eine heterogene Verschiebung verursacht eine Änderung der Dichte \Rightarrow Diese verursacht eine nicht homogene Druckverteilung \Rightarrow Diese bewirkt Bewegung. Die Druckänderungen bei Schallausbreitung sind meistens sehr klein: Einem starken Schall mit der Intensität 60db entspricht eine Druckamplitude von $2 \cdot 10^{-7}$ bar. Für die kleinen Druckänderungen gilt

$$p(\rho_0 + \Delta\rho) = p(\rho_0) + \left(\frac{dp}{d\rho}\right) \Delta\rho$$

$$p(\rho_0) + \Delta p = p(\rho_0) + \kappa \Delta\rho, \quad \boxed{\Delta p = \kappa \Delta\rho}$$

Betrachten wir ein ebene Welle, die sich in Richtung der x -Achse ausbreitet und innerhalb der ein infinitesimal kleines Volumenelement mit der Länge dx und der Fläche A .



Die Verschiebung aus dem Gleichgewichtszustand bezeichnen wir durch $u(x,t)$.

Wegen der Masseerhaltung gilt

$$\rho_0 \Delta x = \rho(t) \left(\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x \right) =$$

$$(\rho_0 + \Delta\rho) \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x = \Delta x \cdot \left(\rho_0 + \Delta\rho + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Daraus folgt $\boxed{\Delta\rho = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x}}$.

Die Bewegungsgleichung lautet

$$dm \cdot \ddot{u} = A (p(x) - p(x+dx)) = -A \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

oder $\boxed{\rho_0 \ddot{u} = -\frac{\partial p}{\partial x}}$. \Rightarrow

$$\rho_0 \ddot{u} = -\frac{\partial p}{\partial x} = -\kappa \frac{\partial \rho}{\partial x} = \kappa \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

oder $\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$.

Das ist eine Wellengleichung mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit $\boxed{c = \sqrt{\kappa} = \sqrt{\partial p / \partial \rho}}$.

II. Schallgeschwindigkeit

Berechnung von Newton (nicht korrekt!).

Für Gase gilt $p = nkT = \frac{\rho kT}{m}$. Aus der kinetischen Gastheorie ist bekannt, dass

$$kT = \frac{1}{3} m \langle v^2 \rangle. \quad \text{Somit} \quad p = \frac{1}{3} \rho \langle v^2 \rangle.$$

$$c = \sqrt{\partial p / \partial \rho} = \sqrt{\langle v^2 \rangle / 3}.$$

Korrekte Berechnung

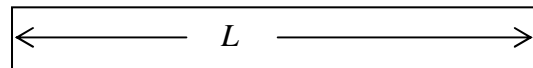
In Wirklichkeit erwärmt sich das Gas beim Komprimieren und deshalb gilt

$p = \text{const} \cdot \rho^\gamma$. Für Moleküle, die aus zwei Atomen bestehen, ist $\gamma = 1.4$. Das heißt

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \gamma \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{3} \langle v^2 \rangle.$$

Die Schallgeschwindigkeit ist

$$c = \sqrt{\frac{\gamma}{3} \langle v^2 \rangle} \approx 0.7 \sqrt{\langle v^2 \rangle}.$$

III. Eigenfrequenzen

Zu bestimmen sind die Eigenfrequenzen eines an beiden Seiten geschlossenen Rohres.

Lösung. Wir lösen die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

mit den Randbedingungen

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0$$

mit Hilfe des Bernoulli-Ansatzes

$$u(x,t) = A \cos \omega t \cdot \sin(kx),$$

wobei die Randbedingung am linken Rand bereits berücksichtigt wurde. Das Einsetzen in die Bewegungsgleichung liefert $\omega^2 = c^2 k^2$.

Die zweite Randbedingung liefert

$$\sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = \pi n \Rightarrow k = \pi n / L \Rightarrow$$

$$\boxed{\omega = \pi c n / L}$$

IV. Zu bestimmen sind die Eigenfrequenzen eines auf einer Seite offenen Rohres.

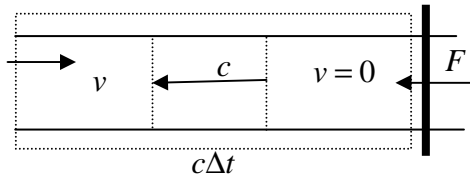
Lösung. Am offenen Ende des Rohres ist der Druck ungefähr gleich dem atmosphärischen Druck und der Überdruck Null. Aus

$$\Delta p = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} \text{ folgt } \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = 0.$$

Die gleiche Aufgabe wie oben ist nun mit einer geänderten Randbedingung zu lösen $\Rightarrow \cos(kL) = 0, \quad kL = \pi / 2 + \pi n$.

V. Hydrodynamischer Schlag

Die Strömung in einem Rohr muss schnell durch einen Absperrschieber aufgehalten werden. Welcher Druck wirkt dabei auf den Schieber?



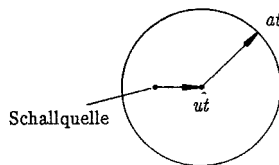
Die Änderung des Impulses des Kontrollvolumens ist $\Delta P = 0 - \rho A c \Delta t v$. Nach dem Impulssatz gilt $\Delta P / \Delta t = -\rho v c A = -F$. Der Druck ist demnach

$$p = F / A = \rho v c.$$

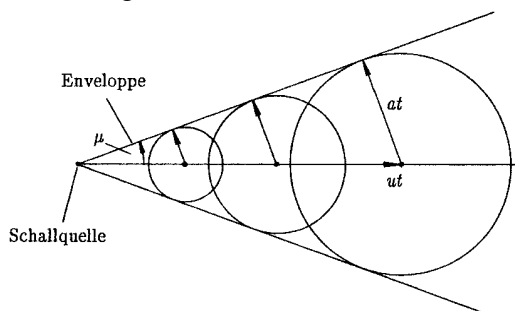
Z.B. für Wasser bei $v = 1 \text{ m/s}$ ist $p = 10^3 \cdot 10^3 = 1 \text{ MPa} = 10 \text{ bar}$.

VI. Überschallströmungen

Wir betrachten eine stationäre Strömung (Geschwindigkeit u) mit einer ortsfesten Schallquelle, die zu einer bestimmten Zeit ein Signal aussendet. Bei $u < c$ sieht die Welle zum Zeitpunkt t wie folgt aus.



Für $t \rightarrow \infty$ wird die Schallwelle den gesamten Raum erreichen. Ist $v > c$, so ergibt sich die im nächsten Bild skizzierte Lage der Schallwelle. Für $t \rightarrow \infty$ wird die Schallwelle nicht den gesamten Raum erreichen.



Die einhüllende Kurve, deren halber Öffnungswinkel μ sich aus der Gleichung

$$\sin \mu = \frac{c}{v} = \frac{1}{M}$$

berechnet, nennt man den *Machschen Kegel*. Die Zahl $M = v/c$ ist die *Machsche Zahl*.

VII. Schallenergie, Energiestromdichte

Eine Welle mit der Kreisfrequenz ω hat die Form $x = x_0 \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right)$.

Für die Geschwindigkeit ergibt sich

$$v = v_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right) = x_0 \omega \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right).$$

Kinetische Energie pro Volumeneinheit ist

$$K/V = \frac{\rho}{2} x_0^2 \omega^2 \cos^2\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right).$$

Der Mittelwert der kinetischen Energie

$$\langle K/V \rangle = \frac{\rho}{4} x_0^2 \omega^2.$$

Die Gesamtenergie bei kleinen Schwingungen ist das Zweifache der kinetischen Energie. Die gesamte *Energiedichte E* ist also

$$E = 2 \langle K/V \rangle = \frac{\rho}{2} x_0^2 \omega^2.$$

Diese Energie "fließt" mit der Schallgeschwindigkeit. Der *Energiefluss* (auch *Schallintensität*) ist deshalb gleich

$$I = \frac{\rho}{2} x_0^2 \omega^2 c$$

Für die Dichte ergibt sich

$$\Delta \rho = -\rho \frac{\partial u}{\partial x} = \rho \frac{x_0 \omega}{c} \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right)$$

und für den Druck

$$\Delta p = \kappa \Delta \rho = \kappa \rho \frac{x_0 \omega}{c} \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right) = \Delta p_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right)$$

Amplitude der Druckoszillationen ist

$$\Delta p_0 = \kappa \rho \frac{x_0 \omega}{c}.$$

Für die Intensität als Funktion der Druckamplitude erhalten wir

$$I = \frac{\rho}{2} \frac{c^3 \Delta p_0^2}{\kappa^2 \rho^2} = \frac{\Delta p_0^2}{2 \rho c}.$$

Ist die Druckamplitude größer als der mittlere Druck, so kann es zur Kavitation kommen.

Im Wasser ist dafür mindestens die Energie-

$$\text{stromdichte } I = \frac{\Delta p_0^2}{2 \rho c} = \frac{(10^2)^2}{2 \cdot 10^3 \cdot 10^3} = 5 \text{ kW/m}^2$$

erforderlich.

VIII. Relative Lautstärke

Zur Charakterisierung der Schallintensität wird eine dimensionslose Größe

$$J = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{p}{p_{\text{ref}}} \right) = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{I}{I_{\text{ref}}} \right) \text{ dB}$$

(*Dezibel*) benutzt, wobei $p_{\text{ref}} = 2 \cdot 10^{-10} \text{ bar}$ ist ein Referenzdruck. Unterscheiden sich zwei Intensitäten um das 10fache, so unterscheiden sich ihre relativen Lautstärken um 10 dB.