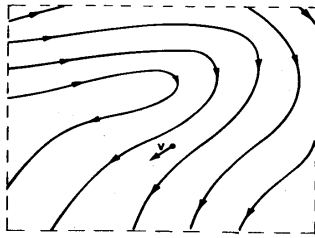


**Kontinuitätsgleichung, Bernoullische Gleichung**

Lit.: 1. G.P. Ostermeyer. "Mechanik III", Gross, Hauger, Schnell und Wriggers, „Technische Mechanik 4“

**I. Geschwindigkeitsfeld und Stromlinien in einer Flüssigkeit**



**II. Flüssigkeitsbewegung in einer Stromröhre**

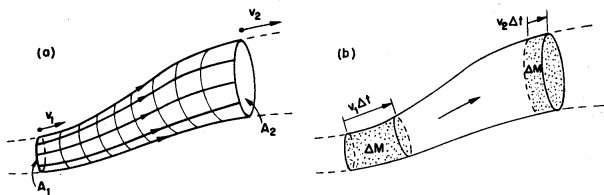
**A. Kontinuitätsgleichung**

Stationäre Strömung ⇒ Bei  $A_1$  fließt gleich viel Masse ein, wie bei  $A_2$  ausströmt:

$$\Delta M = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t . \text{ Somit}$$

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \quad \text{oder}$$

$$\boxed{\rho A v = const} \quad (\text{Kontinuitätsgleichung})$$



**B. Die vom Flüssigkeitsdruck geleistete Arbeit:**

Annahmen: keine viskosen Kräfte, inkompressible Flüssigkeit. Die Arbeit, die an der bei  $A_1$  eintretenden Flüssigkeit geleistet wird, ist  $p_1 A_1 v_1 \Delta t$ . Die Arbeit an der bei  $A_2$  austretenden Flüssigkeit  $-p_2 A_2 v_2 \Delta t$ . Die gesamte Arbeit ist gleich der Energiezunahme einer Masse  $\Delta M$ , die sich von  $A_1$  nach  $A_2$  bewegt:

$$p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t = E_2 - E_1$$

$$E = \Delta M \left( \frac{1}{2} v^2 + \phi \right) \quad \begin{matrix} \text{potentielle Energie pro} \\ \text{Masseneinheit (Potential)} \end{matrix}$$

kinetische Energie pro Masseneinheit

Nach Dividieren durch  $\Delta M$  :

$$\frac{p_1 A_1 v_1 \Delta t}{\Delta M} - \frac{p_2 A_2 v_2 \Delta t}{\Delta M} = \frac{1}{2} v_2^2 + \phi_2 - \frac{1}{2} v_1^2 - \phi_1$$

$$\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} v_1^2 + \phi_1 = \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} v_2^2 + \phi_2 \quad \text{oder}$$

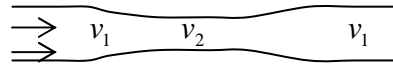
$$\boxed{\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \phi = const}$$

**(Bernoullische Gleichung)**

Z.B. im Gravitationsfeld ( $\phi = gz$ ):

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + gz = const$$

**Beispiel 1. Sich verjüngendes Rohr.**

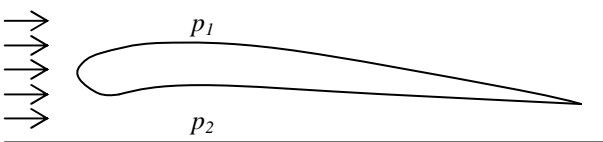


Aus der Bernoulli-Gleichung folgt

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} v_2^2 = \frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} v_1^2 .$$

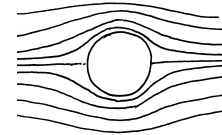
Aus der Kontinuitätsgleichung  $v_2 > v_1$ . Deshalb  $p_2 < p_1$ . In Bereichen mit größerer Geschwindigkeit (in engeren Bereichen) ist der Druck kleiner!

**Beispiel 1a. Ein Flügel**



**Beispiel 2. Die auf einen laminar umströmten (symmetrischen) Körper wirkende Kraft.**

Die Druckverteilung ist symmetrisch. Die Gesamtkraft ist Null.



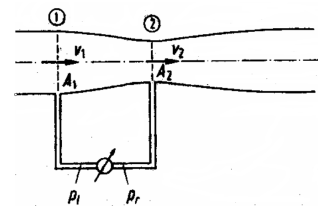
**Beispiel 3. Messung des Volumenstroms.**

Der Volumenstrom  $Q$  ist konstant im Rohr, deshalb

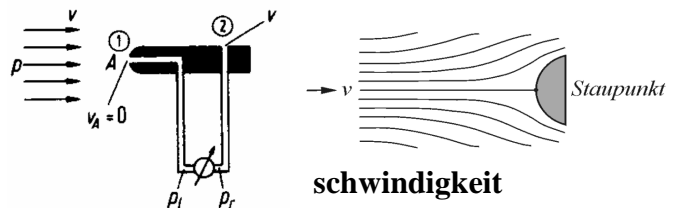
$$v_1 = Q / A_1 ,$$

$$v_2 = Q / A_2 . \text{ Einsetzen in (1) liefert}$$

$$Q = \sqrt{\frac{2 A_1^2 A_2^2 (p_1 - p_2)}{\rho (A_1^2 - A_2^2)}} .$$



**Beispiel 4. Messung der Strömungsgeschwindigkeit**



**schwindigkeit (Prandtl-Rohr).**

Die Geschwindigkeit im Punkt A (Staupunkt) ist Null. Die Bernoulli-Gleichung:

$$p_l - p_r = \frac{1}{2} \rho v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2(p_l - p_r) / \rho}$$

**Beispiel 5. Ausfluss aus einem Gefäß mit einer Spiegelgröße  $A_s$  und einer kleinen Öffnung  $A$ .**

Bernoulli-Gleichung:

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2} 0^2 + gh = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2} v_{aus}^2 + 0$$

$$v_{aus} = \sqrt{2gh}$$

(Ausflussformel von Toricelli)  
Die Änderung der Spiegelhöhe

$$v_s = -\frac{dh}{dt}$$

Die Kontinuitätsgleichung ergibt

$$A_s v_s = A v_{aus} \quad \Rightarrow \quad v_s = A v_{aus} / A_s$$

Aus beiden Gleichungen

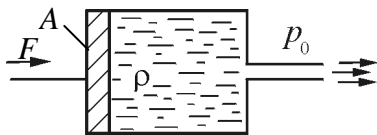
$$dh = -\frac{A}{A_s} v dt = -\frac{A}{A_s} \sqrt{2gh} \cdot dt$$

Trennen der Veränderlichen und Integration liefern

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{A}{A_s} \sqrt{2g} \cdot \int_{t_1}^{t_2} dt \quad \Rightarrow$$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{A_s}{A} (\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1})$$

**Beispiel 6. Ausströmgeschwindigkeit einer Flüssigkeit.**



$$\frac{p}{\rho} + 0 = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2 \frac{p - p_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{2F}{A\rho}}$$

**III. Kompressible Medien**

Im allgemeinen Fall gilt für eine stationäre Strömung ( $\partial \vec{v} / \partial t = 0$ ):

$$\left( \frac{1}{2} \nabla v^2 + \frac{\nabla p}{\rho} + \nabla \phi \right) = 0$$

(entlang einer Stromlinie!)

Für kompressible Medien mit  $\rho = \rho(p)$

$$\frac{\nabla p}{\rho(p)} = \nabla \Gamma(p), \quad \Gamma(p) = \int \frac{dp}{\rho(p)}$$

Die Bernoulli-Gleichung nimmt die Form

$$\frac{1}{2} v^2 + \Gamma(p) + \phi = const$$

an, oder

$$\frac{1}{2} v^2 + \int \frac{dp}{\rho(p)} + \phi = const.$$

Für Gas  $\rho = p/b$ ,  $\Gamma(p) = b \ln p$ ,  
Bernoulli-Gleichung:

$$\frac{v^2}{2} + \phi + b \ln p = const$$

Ausströmungsgeschwindigkeit eines Gases (s. Beispiel 7)

$$\rho = p/b, \quad F(p) = \int \frac{dp \cdot b}{p} = b \ln p$$

$$b \ln p = \frac{v^2}{2} + b \ln p_0; \quad v = \sqrt{2b(\ln p / p_0)}$$

z.B. bei  $p = 2p_0$ ,  $b = 0,7c^2$ ,  $v \approx c$