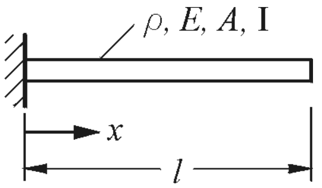
Biegeschwingungen von Balken. Zweidimensionale Schwingungen.

Lit.: 1. G.P. Ostermeyer. "Mechanik III". Gross, Hauger, Schnell und Wriggers, „Technische Mechanik 4"

I. Balkenschwingung

Beispiel 1. Gegeben sei ein links eingespannter Balken. Zu bestimmen sind die Eigenfrequenzen und die Eigenformen der Schwingungen.



Lösung: Die allgemeine Lösung lautet

$$W(x) = A^* \cos\kappa x + B\sin\kappa x + C\cosh\kappa x + D\sinh\kappa x$$

Die Randbedingungen sind:

Verschiebung links Null:

$W(0)=0: \quad A^*+C=0$

Neigung links Null:

$W'(0)=0: \quad B+D=0$

Moment rechts Null:

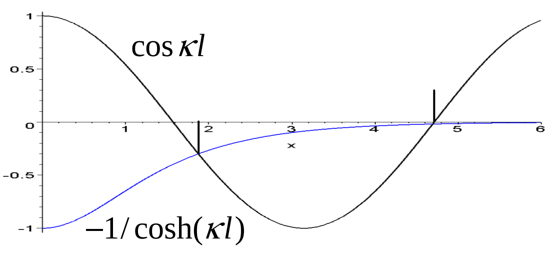
$$W''(l)=0: \quad \begin{aligned}&-A^*\cos\kappa l - B\sin\kappa l \\ &+C\cosh\kappa l + D\sinh\kappa l = 0\end{aligned}$$

Kraft rechts Null:

$$W'''(l)=0 \quad \begin{aligned}&A^*\sin\kappa l - B\cos\kappa l \\ &+C\sinh\kappa l + D\cosh\kappa l = 0\end{aligned}$$

Die charakteristische Gleichung (Determinante des Gleichungssystems gleich Null):

$$\cosh\kappa l\cos\kappa l + 1 = 0 \ \text{ oder } \ \cos\kappa l = -\frac{1}{\cosh\kappa l}$$



$\kappa_1 l = 1.8, \quad \kappa_2 l = 4.7$

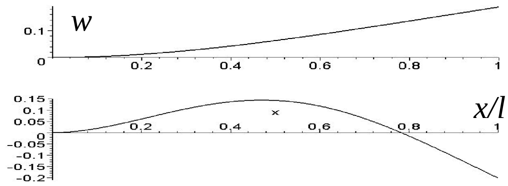
Um die Eigenformen zu bestimmen, verwenden wir drei der vier Gleichungen des homogenen Gleichungssystems

$$C=-A, \quad B=-D=-A\frac{\cos\kappa l + \cosh\kappa l}{\sin\kappa l + \sinh\kappa l}.$$

Die Eigenformen sind dann:

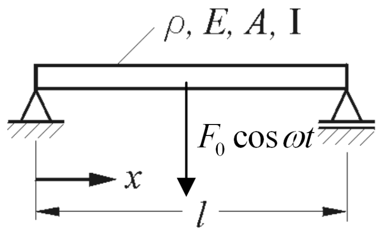
$$W_n(x) = A\left\{ \cos\kappa_n x - \cosh\kappa_n x - \frac{\cos\kappa_n l + \cosh\kappa_n l}{\sin\kappa_n l + \sinh\kappa_n l}(\sin\kappa_n x - \sinh\kappa_n x)\right\}$$

Die ersten zwei Eigenformen sind im Bild gezeigt.



II. Erzwungene Schwingungen.

Beispiel 2. Zu berechnen ist Amplitude der Schwingungen des Mittelpunktes des gezeigten Balkens.



Lösung: Wir suchen die partikuläre Lösung in der Form $w(x,t) = W(x)\cos\omega t$

Allgemeine Lösung bis zur Mitte des Balkens sei

$$W_-(x) = A^*\cos\kappa x + B\sin\kappa x + C\cosh\kappa x + D\sinh\kappa x$$

Randbedingungen:

$$\left.\begin{aligned}&W_-(0)=0 \qquad A^*+C=0 \\ &W_-''(0)=0 \qquad -A^*+C=0\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned}&A^*=0\\ &C=0\end{aligned}$$

$W_-'(l/2)=0$ (aus Symmetriegründen):

$$\cancel{-A^*\sin\kappa l/2} + B\cos\kappa l/2 + \cancel{C\sinh\kappa l/2} + D\cosh\kappa l/2 = 0$$

$$-Q_{links}(l/2) - F_0/2\cdot\cos\Omega t = 0;$$

$$Q(l/2) = EIw'''(x,t) = F(x,t)/2:$$

$$\cancel{A^*\sin\kappa l/2} - B\cos\kappa l/2 + \cancel{C\sinh\kappa l/2} + D\cosh\kappa l/2 = \frac{F_0}{2\kappa^3 EI}$$

Die Lösung lautet

$$D = \frac{F_0}{4\kappa^3 EI\cosh\kappa l/2}, \quad B = -\frac{F_0}{4\kappa^3 EI\cos\kappa l/2}.$$

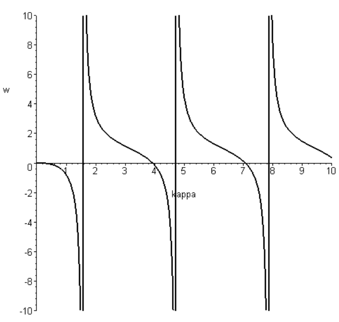
Die Ortsfunktion ist

$$W_-(x) = \frac{F_0}{4\kappa^3 EI}\left(-\frac{\sin\kappa x}{\cos\kappa l/2} + \frac{\sinh\kappa x}{\cosh\kappa l/2}\right)$$

Die Amplitude der Schwingungen bei $x = l/2$:

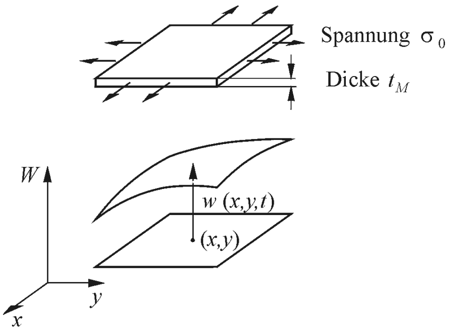
$$W(l/2) = \frac{F_0}{4\kappa^3 EI}\left(-\frac{\sin\kappa l/2}{\cos\kappa l/2} + \frac{\sinh\kappa l/2}{\cosh\kappa l/2}\right)$$

Sie wird unendlich wenn der Nenner Null wird.



III. Bewegungsgleichung für eine Membran.

Genauso wie eine Saite, hat eine *Membran* keine Biegesteifigkeit. Sie wird erst durch eine Vorspannung elastisch. Betrachten wir eine in allen Richtungen gleich gespannte Membran (Spannung σ_0).



Die Bewegungsgleichung lautet:

$$\boxed{\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)} \quad \text{mit} \quad c^2 = \sigma_0 / \rho$$

Zweidimensionale Wellengleichung

Die Ableitungen auf der rechten Seite verkürzt man oft zu

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$ heißt *Laplace-Operator*.

Die Wellengleichung kann dann auch in der Form $\boxed{\ddot{w} = c^2 \Delta w}$ geschrieben werden.

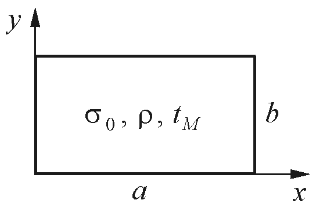
IV. Bernoulli-Ansatz. Die zweidimensionale Wellengleichung kann immer mit dem Bernoulli-Ansatz gelöst werden:

$w(x,y,t) = W(x,y)\cdot\cos\omega t$

Das ist besonders sinnvoll, wenn nach Eigenfrequenzen gefragt wird. Einsatz in die Wellengleichung liefert für den Ortsteil des Ansatzes die folgende Gleichung

$$\underbrace{\Delta W + k^2 W = 0}_{Helmholtz-Gleichung} \quad \text{mit } k = \omega/c$$

Beispiel 3. Gegeben ist eine Rechteckmembran mit fest gelagerten Rändern. Zu finden sind die Eigenschwingungsformen und die Eigenfrequenzen,



Lösung:

Bernoulli-Ansatz:

$w(x,y,t) = W(x,y)\cdot\cos\omega t$

Die Ortsfunktion $W(x,y)$ suchen wir wiederum in Form eines Produktes

$W(x,y) = X(x)Y(y)$ mit

$$\begin{cases} X = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x \\ Y = C\cos\beta x + D\sin\beta y \end{cases}$$

Einsetzen in die Helmholtz-Gleichung ergibt

$\alpha^2 + \beta^2 = k^2$

Jetzt benutzen wir die Randbedingungen:

$W(0,y) = 0 \to X(0) = 0 \qquad A = 0$

$W(a,y) = 0 \to X(a) = 0 \qquad B\sin\alpha a = 0$

$W(x,0) = 0 \to Y(0) = 0 \qquad C = 0$

$W(x,b) = 0 \to Y(b) = 0 \qquad D\sin\beta b = 0$

Daraus folgt

$$\sin\alpha a = 0 \to \alpha_m = \frac{\pi m}{a} \qquad m = 1,2,...$$

$$\sin\beta b = 0 \to \beta_m = \frac{\pi n}{b} \qquad n = 1,2,...$$

$$k_{mn} = \sqrt{\alpha_m^2 + \beta_n^2} = \pi\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

Eigenfrequenzen sind somit

$$\omega_{mn} = k_{mn}c = \pi c\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

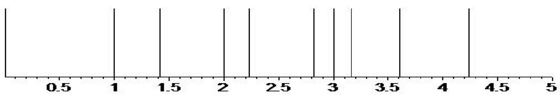
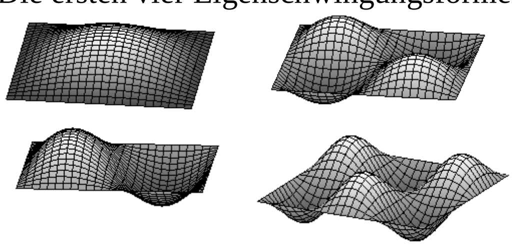


Bild. Verteilung von Eigenfrequenzen einer Membran bei $a = b$.

Eigenfunktionen sind:

$$W_{mn} = \sin\frac{m\pi x}{a}\cdot\sin\frac{n\pi y}{b}$$

Die ersten vier Eigenschwingungsformen:



V. Experiment: Eigenschwingungsformen einer Platte