Kontinuumsmechanik / Prof. Popov / Vorlesung 2.

Bernoullische Lösung der Wellengleichung. Fourieranalyse

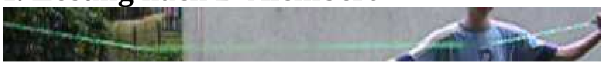
Literatur: 1. G.P. Ostermeyer. "Mechanik III" 21.2. 2. Gross, Hauger, Schnell und Wriggers, „Technische Mechanik 4“, Kapitel 4.1.3

Betrachtet wird eine gespannte Saite. Ihre Dynamik wird durch die Wellengleichung beschrieben: $\boxed{\ddot{w} = c^2 w''}$. Dazu kommen die Randbedingungen. Für beidseitig festgehaltene Saite:

$$w(0,t) = 0 \qquad (1)$$

$$w(l,t) = 0 \qquad (2)$$

I. Lösung nach D'Alembert



II. Lösungsansatz von Daniel Bernoulli (1753)

$w(x,t) = T(t) \cdot V(x)$ - Produktansatz

$$\ddot{T}V = c^2 T V'' \Rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ \text{nur von } t}}{\frac{\ddot{T}}{T}} = c^2 \underset{\substack{\downarrow \\ \text{nur von } x}}{\frac{V''}{V}} = \text{const}$$

c) $const = -\omega^2 < 0$

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0, \qquad V'' + \frac{\omega^2}{c^2} V = 0$$

Die allgemeine Lösung der ersten Gleichung:
$T(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t = C\cos(\omega t - \varphi)$.

Die Konstante ω ist eine Kreisfrequenz der Schwingung.
Die allgemeine Lösung der zweiten Gleichung

$$V(x) = A\cos\frac{\omega}{c}x + B\sin\frac{\omega}{c}x.$$

Aus den Randbedingungen (1) und (2) folgt:
$V(0) = A = 0$,

$$V(\ell) = B\sin\frac{\omega}{c}\ell = 0 \Rightarrow \sin\frac{\omega}{c}\ell = 0 \Rightarrow \frac{\omega}{c}\ell = \pi n$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_n}{c} = \frac{\pi n}{\ell} \Rightarrow \boxed{\omega_n = \frac{\pi c}{\ell} n}.$$

n - eine beliebige ganze Zahl.

ω_n sind *Eigenfrequenzen*

Es gibt unendlich viele Eigenfrequenzen. Die entsprechende Ortsfunktion $V(x)$ ist gleich

$$\boxed{V_n(x) = B\sin\left(\frac{\pi n}{\ell}x\right)}$$

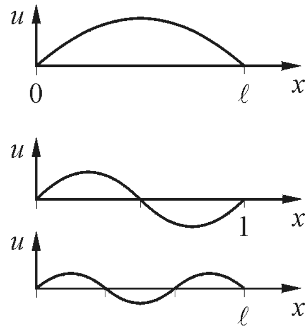
$V_n(x)$ sind *Eigenformen*

Die ersten zwei Eigenfrequenzen sind gleich

$$\omega_1 = \frac{c\pi}{\ell} \quad \text{und} \quad \omega_2 = \frac{2c\pi}{\ell} = 2\omega_1.$$

Die gesamte Lösung bei einem bestimmten *n*:

$$w(x,t) = \sin\frac{\pi n}{\ell}x \cdot \left(a_n\cos\frac{c\pi n}{\ell}t + b_n\sin\frac{c\pi n}{\ell}t\right)$$



III. Wie kann man die Anfangsbedingungen erfüllen?

Allgemein sind Anfangsauslenkungen und Anfangsgeschwindigkeiten des Stabes gegeben, die einer der Eigenformen *nicht* entsprechen. Die Lösung wird gegeben durch

Superpositionsprinzip + Fourieranalyse

Aus der Linearität der Wellengleichung folgt: Eine beliebige lineare Superposition von gefundenen Lösungen ist auch eine Lösung der Wellengleichung.

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{\ell}x \cdot \left(a_n\cos\frac{c\pi n}{\ell}t + b_n\sin\frac{c\pi n}{\ell}t\right)$$

Eine stärkere Behauptung: Eine beliebige Lösung kann in Form

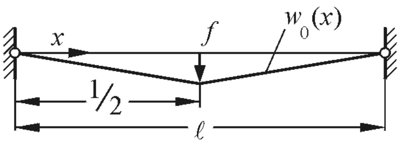
$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{\ell}x \cdot \left(a_n\cos\frac{c\pi n}{\ell}t + b_n\sin\frac{c\pi n}{\ell}t\right)$$

dargestellt werden. Dieser Satz wurde als eine Hypothese von Bernoulli aufgestellt. Er konnte sich aber gegen Euler und d`Alembert nicht durchsetzen, bis Fourier den Satz bewiesen hat.

Wie können die Rand- und Anfangsbedingungen erfüllt werden?

Beispiel. Die Seite mit festen Rändern und Anfangsbedingungen

$$w(x,0) = w_0(x), \quad \dot{w}(x,0) = v_0(x).$$



Aus der allgemeinen Lösung folgt die folgende Anfangsbedingung:

$$w_0(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{\pi n x}{\ell} = w_0(x)$$

$$\dot{w}_0(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{c\pi n}{\ell} \cdot \sin\frac{\pi n x}{\ell} = v_0(x) = 0$$

Wir multiplizieren beide Gleichungen

mit $\sin\frac{k\pi x}{\ell}$ (wobei k eine ganze Zahl ist)

und integrieren über die Länge der Saite. Mit

$$\int_0^{\ell} \sin\frac{k\pi x}{\ell} \sin\frac{n\pi x}{\ell} dx = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \ell/2, & k = n \end{cases}$$

erhält man

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} w_0(x) \sin\frac{n\pi x}{\ell} dx$$

$$b_n = \frac{2}{\ell} \cdot \frac{\ell}{\pi n c} \int_0^{\ell} 0 dx = 0 .$$

In unserem Fall ist

$$w_0 = \begin{cases} 2f\, x/\ell, & a < x < \ell/2 \\ 2f\,(1-x)/\ell, & \ell/2 < x < \ell \end{cases}$$

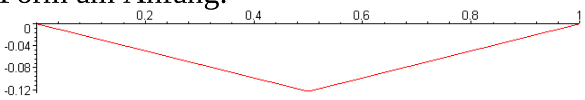
$$a_n = \frac{4f}{\ell}\left[\int_0^{\ell/2} \frac{x}{\ell} \sin\frac{n\pi x}{\ell} dx - \int_{\ell/2}^{\ell} \left(\frac{x}{\ell} - 1\right) \sin\frac{n\pi x}{\ell} dx\right]$$

$$= \frac{8f}{n^2\pi^2} \sin\frac{n\pi}{2} .$$

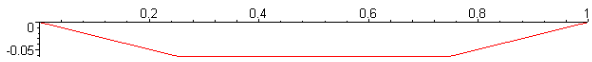
Somit

$$w(x,t) = f \cdot \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{n^2} \cdot \sin\frac{n\pi x}{\ell} \cdot \cos\frac{c\pi n}{\ell} t$$

Form am Anfang:



und nach 1/4 Periode



IV. Ein Beispiel zur Bestimmung der Eigenfrequenzen und Eigenformen.

Sehr oft braucht man nur die Eigenfrequenzen und die Eigenformen, z.B. wenn Resonanz vermieden werden soll.

Beispiel. Gegeben sei eine auf einem Rand festgehaltene Saite.

Zu bestimmen sind die Eigenfrequenzen und die Eigenfunktionen.

Lösung: Allgemeine Lösung für die Ortsfunktion lautet

$$V(x) = A\cos\frac{\omega}{c}x + B\sin\frac{\omega}{c}x .$$

Die Randbedingungen lauten in diesem Fall:

$w(x=0)=0$, $\quad w'(x=l)=0$.

Randbedingungen liefern:

$V(0)=0 \Rightarrow A=0$,

$$V'(\ell) = 0 \Rightarrow B\frac{\omega}{c}\cos\frac{\omega\ell}{c} = 0 .$$

Für nicht triviale Lösungen muss gelten

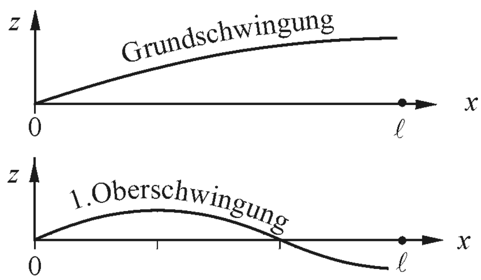
$$\cos\frac{\omega\ell}{c} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\omega\ell}{c} = \frac{\pi}{2} + \pi n \;\Rightarrow$$

$$\omega_n = \frac{2n+1}{2}\frac{\pi c}{\ell}, \quad n = 0,1,2,...$$

Grundschwingung und die 1. Oberschwingung:

$$\omega_1 = \frac{\pi c}{2\ell}, \quad V_1(x) = B_1 \sin\frac{\pi x}{2\ell}$$

$$\omega_2 = \frac{3\pi c}{2\ell}, \quad V_2(x) = B_2 \sin\frac{3\pi x}{2\ell}$$



Wie hängt die Frequenz von der Spannkraft S ab?

z.B. $\omega_1 = \frac{\pi c}{2\ell} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{S}{\mu\ell^2}} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\ell}\sqrt{\frac{S}{\mu}} \sim \sqrt{S}$.

V. Zur Äquivalenz der Lösungsmethoden von d'Alembert und Bernoulli.

<u>Beispiel:</u>

$$u(x,t) = \sin k(x+ct) + \sin k(x-ct)$$

ist eine d'Alembertsche Lösung der Wellengleichung. Durch Umformen erhalten wir:

$$u(x,t) = 2\sin kx \cdot \cos kct .$$

Das ist aber eine Lösung nach Bernoulli!

<u>Für mathematisch Interessierte:</u>

Genauso wie in der Schwingungstheorie benutzt man oft bei der Lösung von Wellengleichung komplexe Exponenten:

$u(x,t) = e^{ikx} \cdot e^{ikct} = e^{ik(x+ct)}$. Dieser Ansatz ist *gleichzeitig* der d'Alembertsche und der Bernoullische! Bei Benutzung komplexer Exponenten verliert sich der Unterschied zwischen beiden Ansätzen.