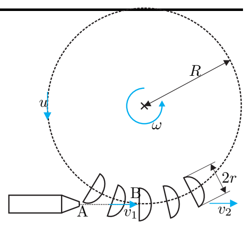
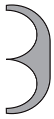
Lösungshinweis:

PLENARÜBUNG

Bei einer Pelton-Turbine trifft Wasser aus einer Düse (Punkt A) mit hoher Geschwindigkeit v_1 auf die Schaufeln eines Turbinenrades (Punkt B) und treibt dieses dadurch an (obere Skizze). Das Wasser hat danach noch eine Restgeschwindigkeit v_2. Die Turbinen-Schaufeln haben die im unteren Bild dargestellte Form. Betrachtet wird eine Pelton-Turbine mit den Kenndaten:



- Strahlgeschw. $v_1 = 99{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
- Winkelgeschw. $\omega = 37{,}7\,\frac{1}{\mathrm{s}}$
- Strahlkreisradius $R = 1{,}32\,\mathrm{m}$
- Umfangsgeschw. $u = R\omega = 49{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
- Strahlfläche $A = 0{,}032\,\mathrm{m}^2$



Es gelten folgende Annahmen: stationäre, verlustfreie Strömung, Anzahl Schaufeln $\to \infty$, $r \ll R$.

Bestimmen Sie:

(a) das Antriebsmoment M_d

(b) die Laufleistung P

(c) die optimale Umfangsgeschw. u_0 für maximale Laufradleistung

(a) Antriebsmoment:

$$M_d = F_d R \tag{1}$$

Kraft auf Schaufel:

$$F_d = -F_F \tag{2}$$

Kraft auf Flüssigkeit (Impulssatz):

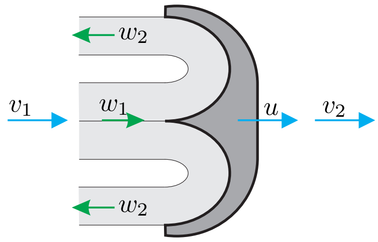
$$\begin{aligned} F_d &= J(v_2 - v_1) && (3)\\ &= \rho A v_1 (v_2 - v_1) && (4) \end{aligned}$$

Einsetzen von (1),(2) in (4):

$$M_d = \rho A R v_1 (v_1 - v_2) \tag{5}$$

Zur Bestimmung von M_d fehlt also noch v_2.

u: Umfangsgeschw.
v: Absolutgeschw.
w: Relativgeschw. (bzgl Schaufel)



$$\begin{aligned} v_1 &= u + w_1 && (6)\\ v_2 &= u - w_2 && (7)\\ \Rightarrow v_1 - v_2 &= w_1 + w_2 && (8) \end{aligned}$$

Wie groß ist w_2?
Unter den gegebenen Annahmen (konstante Drehzahl, große Anzahl Schaufeln, $r \ll R$) kann die Schaufel als Inertialsyystem betrachtet werden.
Bernoulli im „Schaufel-System“:

$$p_1 + \frac{\rho}{2} w_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} w_2^2 \qquad \text{mit } p_1 = p_2 = p_0 \tag{9}$$

$$\Rightarrow w_1 = w_2 \tag{10}$$

(10) in (8) und anschließend in (7):

$$v_1 - v_2 = 2w_1 = 2(v_1 - u) \tag{11}$$

(11) in (5):

$$M_d = 2\rho A R \left(v_1^2 - v_1 u\right) = 418\,\mathrm{kNm} \tag{12}$$

(b) Laufradleistung P

$$\begin{aligned} P &= M_d \omega && (13)\\ &= 2\rho A R \omega \left(v_1^2 - v_1 u\right) \qquad \text{mit } R\omega = u && (14)\\ &= 2\rho A \left(v_1^2 u - v_1 u^2\right) = 15{,}8\,\mathrm{MW} && (15) \end{aligned}$$

(c) optimale Umlaufgeschw. für max. Leistung
Betrachtung eines Extremwertproblems:

$$\frac{\partial P}{\partial u} = 2\rho A \left(v_1^2 - 2 v_1 u\right) \stackrel{!}{=} 0 \tag{16}$$

$$\Rightarrow v_1^2 = 2 v_1 u \overset{v_1 \neq 0}{\Rightarrow} \quad u_0 = \frac{1}{2} v_1 \tag{17}$$

Setzt man (17) in (15), so erhält man die Gleichung für die max. Leistung einer Pelton-Turbine:

$$P_{\max} = \frac{1}{2} \rho A v_1^3 \tag{18}$$