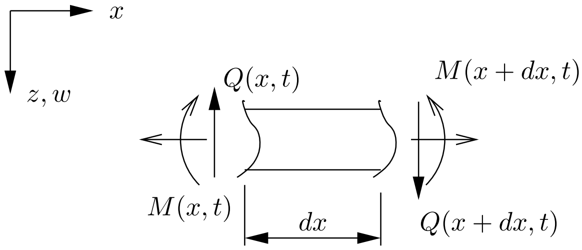
Lösungshinweis:

PLENARÜBUNG

Aufgabe 32

Herleitung der Bewegungsdifferentialgleichung:



Das zweite Newtonsche Gesetz für das skizzierte Balkenelement lautet:

$$dm \cdot \left.\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right|_{(x,t)} = Q(x+dx,t) - Q(x,t) \tag{1}$$

mit $dm = \rho A dx$ und $Q(x+dx,t) \cong Q(x,t) + \frac{\partial Q}{\partial x}dx$ ergibt sich

$$\rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{2}$$

mit $Q = \frac{\partial M}{\partial x}$ und dem Materialgesetz $M = -EI \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ergibt sich für konstantes ρ,A,E,I die DGl

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho A}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \tag{3}$$

(a) Separationsansatz nach Bernoulli:

$$w(x,t) = X(x) \cdot T(t) \tag{4}$$

Eingesetzt in (3) ergibt

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \tag{5}$$

$$X'''' - \frac{\omega^2}{c_Q^2} X = 0 \tag{6}$$

mit $c_Q^2 = \frac{EI}{\rho A}$ und ω noch zu bestimmende Konstante.

(b) Die gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichungen (5) und (6) werden mit einem Exponentialansatz gelöst. Die als allgemeine Lösung resultierende Linearkombination der Exponentialfunktionen ist äquivalent zu einer Linearkombination aus Sinus und Kosinus bzw. zusätzlich sinh und cosh.

Für die Zeitfunktion erhalten wir:

$$T(t) = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t \tag{7}$$

Für die Ortsfunktion ergibt sich:

$$X(x) = B_3 \cosh \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}} x + B_4 \sinh \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}} x + B_5 \cos \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}} x + B_6 \sin \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}} x \tag{8}$$

Die allgemeine Lösung der Bewegungsdifferentialgleichung (3) lautet dann:

$$\omega(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(B_{1,k} \cos \omega_k t + B_{2,k} \sin \omega_k t \Big) \Big(B_{3,k} \cosh \sqrt{\frac{\omega_k}{c_Q}} x + B_{4,k} \sinh \sqrt{\frac{\omega_k}{c_Q}} x + B_{5,k} \cos \sqrt{\frac{\omega_k}{c_Q}} x + B_{6,k} \sin \sqrt{\frac{\omega_k}{c_Q}} x \Big) \tag{9}$$

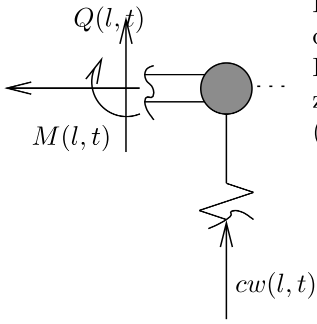
(c) Am linken Rand besteht eine feste Einspannung charakterisiert durch die geometrischen Randbedingungen:

$$w(x=0,t) = 0 \tag{RB 1}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{(x=0,t)} = 0 \tag{RB 2}$$

Am rechten Rand ergeben sich dynamische Randbedingungen:
Eine Punktmasse hat keine Drehträgheit und die Feder leitet auch kein Moment ein:

$$M(x=l,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{(x=l,t)} = 0 \tag{RB 3}$$



Die Querkraft ergibt sich durch Freischneiden der Punktmasse m aus dem zweiten Newtonschen Gesetz (c = Federsteifigkeit):

$$m \left.\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right|_{(x=l,t)} = -Q(l,t) - cw|_{(x=l,t)} \tag{10}$$

mit $Q = -EIw'''$ ergibt sich:

$$m \left.\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right|_{(x=l,t)} = EI \left.\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right|_{(x=l,t)} - cw|_{(x=l,t)} \tag{RB 4}$$

(d) Bei Einsetzen der allg. Lösung in die Randbedingungen werden folgende Ableitungen benötigt:

$$X''(x) = \frac{\omega}{c_Q} \Big[B_3 \cosh \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}} x + B_4 \sinh \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}} x - B_5 \cos \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}} x - B_6 \sin \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}} x \Big] \tag{11}$$

$$X'''(x) = \big(\frac{\omega}{c_Q}\big)^{\frac{3}{2}} \Big[B_3 \sinh \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}} x + B_4 \cosh \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}} x + B_5 \sin \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}} x - B_6 \cos \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}} x \Big] \tag{12}$$

$$\ddot{T}(t) = -\omega^2 T(t) \tag{13}$$

Jede einzelne Fundamentallösung soll die Randbedingungen zu jeder Zeit erfüllen. Deshalb gilt $\forall k$ mit den Abkürzungen $B_3 := B_{3,k}\,,\ \ldots$:

$$\text{(RB 1)} \Rightarrow \quad B_3 + B_5 = 0 \tag{14}$$
$$\text{(RB 2)} \Rightarrow \quad B_4 + B_6 = 0 \tag{15}$$

und es ergibt sich für (RB 3):

$$\begin{aligned} &B_3 \cosh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}l + B_4 \sinh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}l \\ &\quad - \big(-B_3\big)\cos\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}l - \big(-B_4\big)\sin\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}l = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

Für (RB 4) ergibt sich auch eine Gleichung für B_3 und B_4, zusammen mit (16) in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_3 \\ B_4 \end{pmatrix} = 0 \tag{17}$$

mit

$$\begin{aligned} M_{11} &= \cosh\chi + \cos\chi \\ M_{12} &= \sinh\chi + \sin\chi \\ M_{21} &= -\frac{1}{EI}(m\omega^2 - c)\Big(\cosh\chi - \cos\chi\Big) \\ &\quad - \left(\frac{\omega}{c_Q}\right)^{\frac{3}{2}}\Big(\sinh\chi - \sin\chi\Big) \\ M_{22} &= -\frac{1}{EI}(m\omega^2 - c)\Big(\sinh\chi - \sin\chi\Big) \\ &\quad - \left(\frac{\omega}{c_Q}\right)^{\frac{3}{2}}\Big(\cosh\chi + \cos\chi\Big) \\ \chi &:= \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}l \end{aligned} \tag{18}$$

Eine Lösung, bei der $B_3 \neq 0$ und $B_4 \neq 0$, kann es nur geben, wenn die Determinante der Matrix verschwindet ($m_B = A\rho l$):

$$M_{11}\,M_{22} - M_{12}\,M_{21} \overset{!}{=} 0 \tag{19}$$
$$\frac{m}{m_B}\chi - \frac{cl^3}{EI}\chi^{-3} = \frac{1 + \cosh\chi\cos\chi}{\cosh\chi\sin\chi - \sinh\chi\cos\chi} \tag{20}$$

Durch numerische Auswertung von (20) mit (18) lassen sich die Eigenfrequenzen ω_k ermitteln.

Die Gleichung (8) beschreibt die Eigenformen, wenn darin die ermittelten Eigenfrequenzen ω_k und die dazugehörigen Koeffizienten $B_3 \ldots B_6$ eingesetzt werden.