Lösungshinweis:

TUTORIUM

Aufgabe 76

(a) Aus dem Materialgesetz erhält man durch Anwendung der Quotienten-Regel:

$$\begin{aligned}\tau_{r\varphi} &= \eta r \frac{r\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - u_\varphi}{r^2} \\ &= \eta\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}\right) \quad (1)\end{aligned}$$

Zur Herleitung der Geschwindigkeitsverteilung betrachten wir einen aus dem Fluid herausgeschnitten Hohlzylinder. Damit die Strömung stationär ist, muss die Summe der am Hohlzylinder angreifenden Momente um die Rotationsachs identisch Null sein. Insbesondere müssen sich also die aus den Schubspannung resultierenden Momente M_i bzw. M_a an der Innen- und Außenwand des Hohlzylinders aufheben,

$$M_i = M_a. \quad (2)$$

Betrachten wir nun den inneren Zylinder und einen Teil des Fluids als Zylinder mit Radius r, $R_1 \leq r \leq R_0$. Dann beträgt das auf die Mantelfläche A dieses Zylinders wirkende Moment infolge der Schubspannungen:

$$M(r) = \tau A r, \quad (3)$$

bzw. mit (1) und $A = 2\pi r l$, wobei l die unbekannte Höhe des Zylinders sein soll,:

$$M(r) = 2\pi\eta\, l r^2\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}\right). \quad (4)$$

Gleichung (2) bedeuten nun gerade, dass dieses Moment $M(r)$ nicht vom Radius r abhängt sondern konstant ist. Damit folgt aus (4), dass

$$r^2\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - r u_\varphi = c. \quad (5)$$

mit einer noch unbekannten Konstante c gelten muss. [1]

Da die Strömung als stationär angenommen werden soll, kann die Geschwindigkeit u_φ außer vom Radius r, von keiner weiteren Variable abhängen. Wir werden daher im Folgenden die Ableitung $\frac{d}{dr}$ statt der partiellen Ableitung $\frac{\partial}{\partial r}$ schreiben und diese (wie bei Ableitungen nach dem Ort allgemein üblich) durch Striche gekennzeichnet. Gleichung (5) lässt sich dann schreiben als:

$$u'_\varphi - \frac{1}{r}u_\varphi = \frac{c}{r^2}. \quad (6)$$

[1] Differentation dieser Gleichung führt auf die Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2{}^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}u_\varphi = 0$, welche man auch aus der Navier-Stokes-Gleichung für dieses Problem erhält.

Das ist eine lineare DGL 1. Ordnung, die sich mit der Methode des integrierenden Faktors[2] lösen lässt.

Mit $a := -\frac{1}{r}$ und $b := \frac{c}{r^2}$ gilt:

$$u_\varphi = e^{-\int a dr}\left[\int b e^{\int a dr} dr + c_1\right], \quad (7)$$

also:

$$\begin{aligned}u_\varphi(r) &= e^{-\int -\frac{1}{r}dr}\left[\int \frac{c}{r^2}e^{\int -\frac{1}{r}dr}dr + c_1\right] \\ &= e^{\ln r}\left[\int \frac{c}{r^2}e^{-\ln r}dr + c_1\right] \\ &= r\left[\int \frac{c}{r^3}dr + c_1\right] \\ &= c_1 r + \frac{c_2}{r}. \quad (8)\end{aligned}$$

Die Integrationskonstanten sind aus den Randbedingungen (Haftung an festen Oberflächen) zu bestimmen:

$$u_\varphi(r = R_1) = \omega_1 R_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 R_1^2 + c_2 = \omega_1 R_1, \quad (9)$$
$$u_\varphi(r = R_0) = \omega_0 R_0 \quad \Rightarrow \quad c_1 R_0^2 + c_2 = \omega_0 R_0. \quad (10)$$

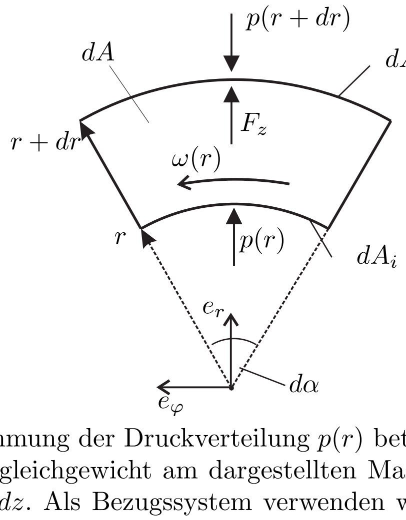
Aus (9)-(10) bzw. (9) $\cdot R_0^2$ - (10) $\cdot R_1^2$ folgen

$$c_1 = \frac{\omega_0 R_0^2 - \omega_1 R_1^2}{R_0^2 - R_1^2} \quad \text{und} \quad (11)$$
$$c_2 = \frac{R_0^2 R_1^2(\omega_1 - \omega_0)}{R_0^2 - R_1^2}. \quad (12)$$

Somit ist die Geschwindigkeit des Fluids:

$$u_\varphi(r) = \frac{\omega_0 R_0^2 - \omega_1 R_1^2}{R_0^2 - R_1^2}r + \frac{R_0^2 R_1^2(\omega_1 - \omega_0)}{R_0^2 - R_1^2}\frac{1}{r}. \quad (13)$$

(b)



Zur Bestimmung der Druckverteilung $p(r)$ betrachten wir das Kräftegleichgewicht am dargestellten Massenelement der Dicke dz. Als Bezugssystem verwenden wir das mitdrehende $e_r - e_\varphi$-System. Da dieses nicht-inertial ist, muss eine Zentrifugalkraft F_z berücksichtigt werden. Außerdem gehen wir davon aus, dass die Druckkräfte auf Innen- und

[2] Vgl. z.B. Bronstein(5. Auflage), S. 507

Außenfläche (dA_i bzw. dA_a) als parallel zur e_r-Achse angesehen werden können. Da es sich um eine stationäre Strömung handelt, müssen sich die Kräfte in e_r-Richtung aufheben:

$$F_z = p(r+dr)dA_a - p(r)dA_i. \tag{14}$$

Dabei sind im Einzelnen:

$$\begin{aligned} F_z &= \omega^2 r dm \\ &= \omega^2 r\rho\pi\left[(r+dr)^2 - r^2\right]\frac{d\alpha}{2\pi}dz \\ &= \omega^2\rho\left[r^2 + \frac{1}{2}rdr\right]drd\alpha dz, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} dA_i &= 2\pi r dz\frac{d\alpha}{2\pi} \\ &= rd\alpha dz, \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} dA_a &= 2\pi(r+dr)dz\frac{d\alpha}{2\pi} \\ &= (r+dr)d\alpha dz. \end{aligned} \tag{17}$$

Eingesetzt in (14) ergibt sich somit der Ausdruck

$$\begin{aligned} &\omega^2\rho\left[r^2 + \frac{1}{2}rdr\right]drd\alpha dz = p(r+dr)(r+dr)d\alpha dz - p(r)rd\alpha dz \\ &\Leftrightarrow \omega^2\rho\left[r^2 + \frac{1}{2}rdr\right]dr = \left[p(r+dr) - p(r)\right]r + p(r+dr)dr. \end{aligned} \tag{18}$$

Die Glieder höherer Ordnung vernachlässigen wir und erhalten dann die Gleichung[3]

$$\begin{aligned} \omega^2\rho r dr &= p(r+dr) - p(r) \\ \Leftrightarrow p' &= \omega^2\rho r. \end{aligned} \tag{19}$$

Mit der Beziehung $\omega = \frac{u_\varphi}{r}$ und (8) folgt daraus

$$\begin{aligned} p' &= \frac{\rho r}{r^2}\left(c_1 r + \frac{c_2}{r}\right)^2 \\ &= \rho\left(c_1^2 r + \frac{2c_1c_2}{r} + \frac{c_2^2}{r^3}\right) \end{aligned} \tag{20}$$

und nach Integration

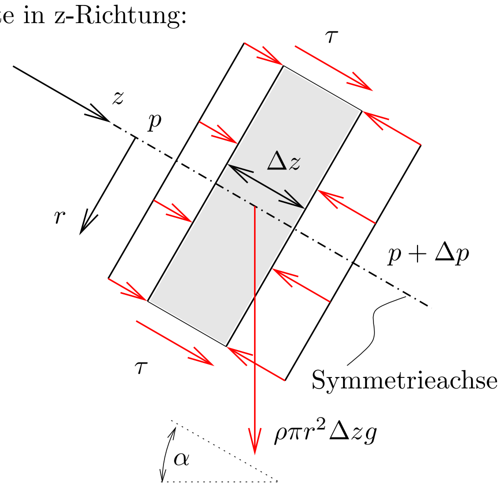
$$\begin{aligned} p(r) &= \int \rho\left(c_1^2 r + \frac{2c_1c_2}{r} + \frac{c_2^2}{r^3}\right)dr \\ p(r) &= \frac{\rho}{2}\left(c_1^2r^2 + 4c_1c_2\ln r - c_2^2\frac{1}{r^2} + c_3\right). \end{aligned} \tag{21}$$

c_1 und c_2 sind die Konstanten gemäß den Gleichungen (11) und (12), c_3 muss durch eine weitere Randbedingung (z.B. Vorgabe eines Druckes am äußeren Zylinder) bestimmt werden.

[3] Auch diese Beziehung lässt sich unmittelbar aus der Navier-Stokes-Gleichung herleiten.

Aufgabe 77

Zur Bestimmung des Geschwindigkeitsprofils betrachte man das Kräftegleichgewicht zwischen Druck- und Reibungskräften und der Gewichtskraft an einem Fluidelement. Dabei nutze man die Symmetrie des Problems. Das scheibenförmige Fluidelemt hat die Endflächen $A_E = \pi r^2$ und die Mantelfläche $A_M = 2\pi r\Delta z$. Damit ist die Summe der Kräfte in z-Richtung:



$$0 = \tau\, 2\pi r\Delta z - \Delta p\pi r^2 + \rho\pi r^2\Delta z g\sin\alpha \tag{22}$$

$$0 = 2\tau - r\frac{\Delta p}{\Delta z} + \rho g r\sin\alpha \tag{23}$$

Grenzübergang $\Delta z \to 0$:

$$\tau = \frac{r}{2}\frac{dp}{dz} - \frac{1}{2}\rho g r\sin\alpha \tag{24}$$

Wir nehmen an, dass der Druck p nur von der Lauflänge z abhängt: $p = p(z)$. Diese Annahme scheint gerechtfertigt, wenn dass Rohr hinreichen dünn ist. Bei einer Newton'schen Flüssigkeit beschreibt folgendes Materialgesetz den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit und der Schubspannung aus Gleichung (24):

$$\tau = \eta\frac{du}{dr} \tag{25}$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{\eta}\left\{\frac{r^2}{4}\frac{dp}{dz} - \frac{\rho g r^2\sin\alpha}{4} + C\right\} \tag{26}$$

Die unbekannte Integrationskonstante C wird durch die Randbedingung bestimmt. An der Rohrwand gilt die Wandhaftbedingung:

$$u(r=R) \stackrel{!}{=} 0 \tag{27}$$

$$\Rightarrow C = \frac{R^2}{4}\left[-\frac{dp}{dz} + \rho g\sin\alpha\right] \tag{28}$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{4\eta}\left\{\left(R^2 - r^2\right)\left[-\frac{dp}{dz} + \rho g\sin\alpha\right]\right\} \tag{29}$$

Jetzt ist das Geschwindigkeitsprofil $u = u(r)$ als Funktion des Druckgradienten $\frac{dp}{dz}$ bekannt. In der Aufgabenstellung ist aber der Volumenstrom Q vorgegeben:

$$Q \overset{\text{Idee!}}{=} \int_A u\, dA \overset{(29)}{=} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} u(r) r dr d\varphi \tag{30}$$

$$\dots \Rightarrow Q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \left[-\frac{dp}{dz} + \rho g \sin\alpha \right] \tag{31}$$

$$\Rightarrow \frac{8Q\eta}{\pi R^4} = \left[-\frac{dp}{dz} + \rho g \sin\alpha \right] \tag{32}$$

(32) in (29):

$$u(r) = \left(R^2 - r^2\right) \frac{2Q}{\pi R^4} \tag{33}$$

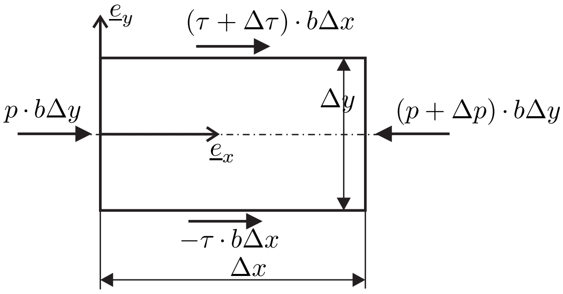
$$= \frac{2Q}{\pi R^2} \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right\} \tag{34}$$

HAUSAUFGABE

Aufgabe 81

In der Aufgabe wird eine schleichende Strömung behandelt, d.h. die Trägheitsterme sind vernachlässigbar. ($m\ddot{x} = 0$ oder $\Theta\ddot{\varphi} = 0$)

(a) 1. Weg
Freischnitt eines Masseelements



$$p \cdot \Delta y b - (p + \Delta p)\Delta y b + (\tau + \Delta\tau)\Delta x \cdot b - \tau b \Delta x = 0 \tag{35}$$

$$\Delta p \Delta y = \Delta\tau \Delta x \tag{36}$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{\Delta\tau}{\Delta y} \tag{37}$$

Grenzübergang:

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial y}} \tag{38}$$

NEWTONsches Schubspannungsgesetz:

$$\tau = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \tag{39}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial^2 y^2} \tag{40}$$

2. Weg NAVIER-STOKES-Gleichung:

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \eta \Delta \underline{v} + \rho g \tag{41}$$

Da schleichende Strömung (s.o.) und keine Gewichtskräfte:

$$\operatorname{grad} p = \eta \Delta \underline{v} \tag{42}$$

Das Geschwindigkeitsprofil ist eine Funktion von y, die Geschwindigkeit geht in $\underline{e}_x$-Richtung

$$\underline{v} = v(y) \underline{e}_x \tag{43}$$

Auswerten von (42) mit (43):

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \tag{44}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow p = p(x) \tag{45}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \tag{46}$$

$$\Rightarrow v(y) = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + c_1 y + c_2 \tag{47}$$

Mit den Randbedingungen:

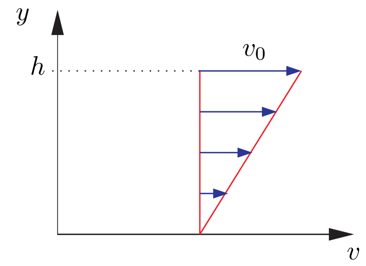
$$v(0) = 0 \qquad \Rightarrow c_2 = 0 \tag{48}$$

$$v(h) = v_0 \qquad \Rightarrow c_1 = \frac{v_0}{h} - \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}h \tag{49}$$

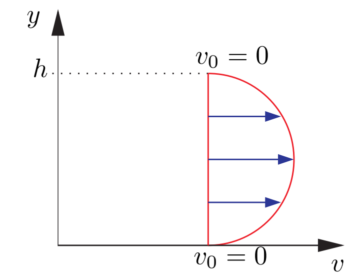
$$\Rightarrow v(y) = \frac{1}{2\eta} \cdot (y-h)y + \frac{v_0}{h}y \tag{50}$$

(b) Geschwindigkeitsverläufe

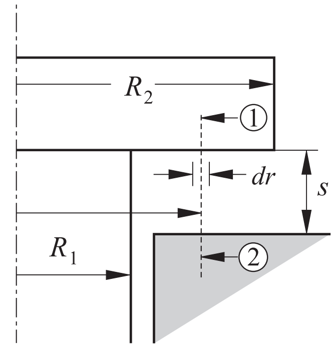
$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$

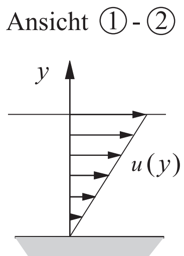


$\frac{\partial p}{\partial x} < 0$, $v_0 = 0$



Aufgabe 82





(a) Für die Spannung $\tau(r)$ gilt nach dem Newtonschen Reibungsgesetz (Couette-Strömung ohne Druckgradient):

$$\tau(r) = \eta \cdot \frac{du}{dy} = \eta \cdot \frac{\Delta u}{\Delta y} = \eta \cdot \frac{u_{\text{Welle}}(r)}{s} \tag{51}$$

mit

$$u_{\text{Welle}}(r) = r \cdot \omega \tag{52}$$

Damit folgt:

$$\tau(r) = \eta \cdot \frac{r \cdot \omega}{s} \tag{53}$$

(b) Für das Drehmoment dM des Kreisringes mit dem Radius r und der Breite dr gilt:

$$dM = \tau(r) \cdot r \cdot dA \tag{54}$$

Mit der Fläche des Kreisringes

$$dA = 2\pi \cdot r \cdot dr \tag{55}$$

und Gleichung (53) wird daraus

$$dM = \frac{2\pi\eta\omega}{s} r^3 dr \; . \tag{56}$$

(c) Das Gesamtdrehmoment ergibt sich daraus durch Integration:

$$M = \int_{R_1}^{R_2} dM \tag{57}$$

$$= \frac{2\pi \cdot \eta \cdot \omega}{s} \cdot \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \tag{58}$$

$$= \frac{2\pi \cdot \eta \cdot \omega}{s} \cdot \left(\frac{R_2^4 - R_1^4}{4}\right) \tag{59}$$

$$= \frac{\pi \cdot \eta \cdot \omega}{2s} \cdot \left(R_2^4 - R_1^4\right) \tag{60}$$

(d) Mit den gegebenen Zahlenwerten ergibt sich:

$$M = \frac{\pi \cdot 0{,}4\frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} \cdot 318{,}3\frac{1}{\text{min}} \cdot \frac{1\text{min}}{60\text{s}}\left[(0{,}4\text{m})^4 - (0{,}2\text{m})^4\right]}{2 \cdot 0{,}0002\text{m}}$$

$$\approx 400\text{Nm}$$