Lösungshinweis:

TUTORIUM

Aufgabe 56

(a) Hinweis: Die Definition für die jeweilige Auftriebskraft F_A ist zu beachten.

$$\begin{aligned} F_A &= \rho g \frac{V_{Zyl}}{2} \\ &= \rho g \frac{1}{2}\left[\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 b\right] \\ &= \frac{1}{8}\rho g \pi d^2 b \end{aligned} \tag{1}$$

(b) Der Druckverlauf ist durch die Grundgleichung der Hydrostatik für inkompressible Fluide bestimmt. Dabei ist zu beachten, wie die Koordinate z eingeführt wird (Vorzeichen und Ursprung). F_K ist die Kraft die von innen auf Grund des Wassers auf die Klappe wirkt.

$$p(z) = p_0 + \rho g s + \rho g z \quad (0 \le z \le h) \tag{2}$$

$$\begin{aligned} F_K &= \int_0^h p(z) b dz \\ &= b\int_0^h \left[(p_0 + \rho g s) + \rho g z\right] dz \\ \Rightarrow F_K &= b\left[(p_0 + \rho g s)\, h + \frac{1}{2}\rho g h^2\right] \end{aligned} \tag{3}$$

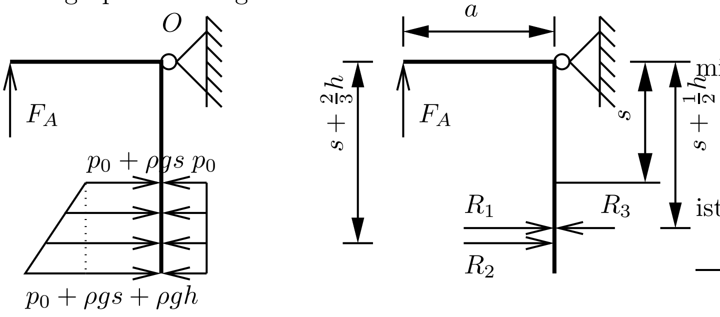
(c) Die notwendige Hebelarmlänge a kann aus einem Momentengleichgewicht um O berechnet werden.

$$\begin{aligned} \sum M^O \overset{!}{=} 0 &= aF_A - \int_0^h \left[p(z) - p_0\right](s+z)\, b dz \\ \Rightarrow aF_A &= b\int_0^h \rho g\,(s+z)^2\, dz \\ &= b\rho g \int_0^h \left[s^2 + 2sz + z^2\right] dz \\ &= b\rho g\left[s^2 h + s h^2 + \frac{1}{3}h^3\right] \end{aligned} \tag{4}$$

$$\Longrightarrow \boxed{a = \frac{8\left[s^2 h + s h^2 + \frac{1}{3}h^3\right]}{\pi d^2}} \tag{5}$$

Alternativ:

Die Berechnungen der Kräfte und der Momente kann auch graphisch erfolgen.



$$R_1^{Rechteck} = (p_0 + \rho g s) bh \tag{6}$$

$$R_2^{Dreieck} = \frac{1}{2}(\rho g h) bh \tag{7}$$

$$R_3^{Rechteck} = p_0 bh \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \sum M^O \overset{!}{=} 0 &= aF_A - \left(s + \frac{h}{2}\right)(R_1 - R_3) - \left(s + \frac{2}{3}h\right) R_2 \\ \Rightarrow aF_A &= (\rho g s) bh \left(s + \frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2}(\rho g h) bh \left(s + \frac{2}{3}h\right) \end{aligned} \tag{9}$$

$$\Longrightarrow \boxed{a = \frac{8\left[s^2 h + s h^2 + \frac{1}{3}h^3\right]}{\pi d^2}} \tag{10}$$

Aufgabe 72

(a) Bernoulli:

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \tag{11}$$

$$\Rightarrow v_1^2 = v_2^2 \quad \Rightarrow |v_1| = |v_2| \tag{12}$$

(b) Impulssatz für einen Stromfaden:

$$\underline{F} = J(\underline{v_2} - \underline{v_1}), \quad J = \text{Massenstrom} \tag{13}$$

horizontale Komponente

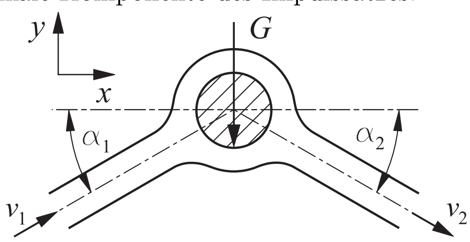
$$F_x = J(v_2 \cos\alpha_2 - v_1 \cos\alpha_1) \tag{14}$$

Annahme: keine Kraft in x-Richtung

$$0 = J(v_2 \cos\alpha_2 - v_1 \cos\alpha_1) \quad \Big| \; v_2 = v_1 \tag{15}$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \alpha_1 \tag{16}$$

(c) vertikale Komponente des Impulssatzes:



$$F_y = -G = J(-v_2 \sin\alpha - v_1 \sin\alpha) \tag{17}$$

mit $v_2 = v_1, \quad \alpha_2 = \alpha_1$:

$$J = \frac{G}{2 v_1 \sin\alpha_1} \tag{18}$$

ist der erforderliche Massenstrom.

HAUSAUFGABE

Aufgabe 69

(a) Gesucht A_2 und A_3 wobei $V_i A_i = \text{const}$ gegeben ist! Bernoulli zw. (0) und (1):

$$\frac{p_i}{\rho_w} + \frac{v_0^2}{2} + gh = \frac{p_0}{\rho_w} + \frac{v_1^2}{2} + ga \tag{19}$$

$$\Rightarrow \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_i - p_0}{\rho_w} + g(h-a) \tag{20}$$

$$v_1 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{p_i - p_0}{\rho_w} + g(h-a)} \tag{21}$$

$$\text{analog:} \quad (0) \to (2) \; v_2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{p_i - p_0}{\rho_w} + g(h-2a)} \tag{22}$$

$$(0) \to (3) \; v_3 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{p_i - p_0}{\rho_w} + g(h-3a)} \tag{23}$$

$$v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2 \tag{24}$$

$$\Rightarrow A_2 = A_1 \cdot \frac{v_1}{v_2} = A_1 \sqrt{\frac{\frac{p_i - p_0}{\rho_w} + g(h-a)}{\frac{p_i - p_0}{\rho_w} + g(h-2a)}} \tag{25}$$

$$\text{analog:} \quad A_3 = A_1 \cdot \frac{v_1}{v_3} = A_1 \sqrt{\frac{\frac{p_i - p_0}{\rho_w} + g(h-a)}{\frac{p_i - p_0}{\rho_w} + g(h-3a)}} \tag{26}$$

(b) Kraft des austretenden Wassers auf ein Rohr:

$$F_k = v_k \cdot \dot{m}_k = v_k \cdot \rho \cdot A_k v_k = \rho A_k v_k^2 \tag{27}$$

Moment aller Kräfte:

$$M = aF_1 + 2aF_2 + 3aF_3 = \sum_{k=1}^{3} kaF_k = \sum_k ka\rho A_k v_k^2 \tag{28}$$

$$\text{da } A_k \cdot v_k = \text{const} = A_1 v_1 \tag{29}$$

$$\hookrightarrow M = a\rho A_1 v_1 \sum_k k v_k \tag{30}$$

Aufgabe 73

(a) Mit der Bernoulli-Gl. folgt für die Punkte 1 und 2 eines Stromfadens:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 \tag{31}$$

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g(-h_1) = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} \tag{32}$$

Da v_1 und v_2 unbekannt sind, benötigt man eine zweite Gleichung. Nach der Kontinuitätsgleichung gilt:

$$\rho v_1 A_1 = \rho v_2 A_2 \tag{33}$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2 \frac{A_2}{A_1} \tag{34}$$

$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2\left[\frac{1}{\rho}(p_1 - p_0) - gh_1\right]}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}} \tag{35}$$

(b) Mit der Bernoulli-Gl. folgt für die Punkte 2 und 3 eines Stromfadens mit $p_2 = p_3 = p_0$:

$$\frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 = \frac{v_3^2}{2} + \frac{p_3}{\rho} + gz_3 \tag{36}$$

$$\frac{v_2^2}{2} = \frac{v_3^2}{2} + gz \tag{37}$$

$$\Rightarrow v_3 = \sqrt{v_2^2 - 2gz} \tag{38}$$

(c) Die Strahlkraft $\underline{F}^S$ des Fluids auf den Kolben berechnet sich nach folgender Formel:

$$\underline{F}^S = \dot{m}\underline{v}_3 \tag{39}$$

$$\text{Konti: } \dot{m} = \rho v_2 A_2 \tag{40}$$

$$\Rightarrow \underline{F}^S = \rho v_2 A_2 \sqrt{v_2^2 - 2gz}\, \underline{e}_z \tag{41}$$

(d) In der Statischen Ruhelage z_s ist die Summe der äußeren Kräfte auf den Kolben gleich Null:

$$\underline{0} = \underline{F}^S + M\underline{g} \tag{42}$$

$$Mg\underline{e}_z = \rho v_2 A_2 \sqrt{v_2^2 - 2gz_s}\, \underline{e}_z \tag{43}$$

$$\Rightarrow z_s = \frac{1}{2g}\left[v_2^2 - \left(\frac{Mg}{\rho A_2 v_2}\right)^2\right] \tag{44}$$