

Lösungshinweis:

PLENARÜBUNG

Aufgabe 63

(a) Kontinuitätsgleichung:

$$v_1 \cdot \pi \frac{d_1^2}{4} = v_2 \cdot \pi \frac{d_2^2}{4} = Q \quad (1)$$

$$v_2 = \frac{4Q}{\pi d_2^2} (*) \quad (2)$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2 \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 \quad (3)$$

Bernoulligleichung:

$$\rho_L \frac{v_1^2}{2} + p_1 = \rho_L \frac{v_2^2}{2} + p_2 \quad (4)$$

(3) in (4)

$$\rho_L \frac{v_2^2}{2} \left(1 - \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^4 \right) = p_1 - p_2 \quad (5)$$

U-Rohr (hydrostatisches Grundgesetz):

$$p_1 = p_2 + \rho_W g \Delta h$$

$$\Rightarrow p_1 - p_2 = \rho_W g \Delta h$$

(7) in (5)

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} \frac{\rho_L}{2} \left(\frac{4Q}{\pi d_2^2} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^4 \right] = \rho_W g \Delta h \quad (6)$$

$$\Rightarrow \frac{4Q}{\pi d_2^2} = \sqrt{\frac{2g\Delta h \cdot \frac{\rho_W}{\rho_L}}{1 - \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^4}} \quad (7)$$

$$Q = \frac{\pi d_2^2}{4} \sqrt{\frac{2g\Delta h \cdot \frac{\rho_W}{\rho_L}}{1 - \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^4}}$$

(b)

$$S_Q = \frac{dh_m}{dQ} = \frac{16\rho_L}{\pi^2 g \rho_W} \left(\frac{1}{d_2^4} - \frac{1}{d_1^4} \right) Q \quad (8)$$

Aufgabe 68

(a)

$$Q = A \cdot v \quad (9)$$

$$\Rightarrow v_4 = \frac{Q_4}{A} \quad (10)$$

An der Austrittsstelle [4] herrscht Umgebungsdruck

$$p_4 = p_0 \quad (11)$$

(b) Bernoulli-Gleichung zwischen [1] und [4]:

$$\frac{p_1}{\rho} + gh_1 + 0 = \frac{p_4}{\rho} + gh_4 + \frac{v_4^2}{2} \quad (12)$$

mit (13) und (14):

$$p_1 = p_0 + \rho g(h_4 - h_1) + \frac{\rho}{2A^2} Q_4^2 \quad (13)$$

(c) Bernoulli-Gleichung zwischen [1] und [3]:

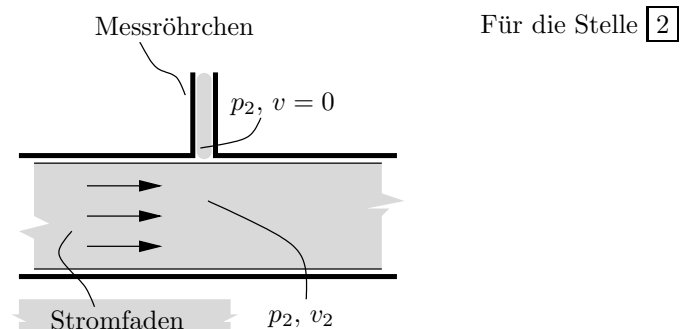
$$\frac{p_1}{\rho} + gh_1 + 0 = \frac{p_3}{\rho} + gh_3 + \frac{v_3^2}{2} \quad (14)$$

mit $p_3 = p_0$ und Gleichung (16):

$$v_3 = \sqrt{2g(h_4 - h_3) + \frac{Q_4^2}{A^2}} \quad (15)$$

Beachte: Nur wenn der Ausdruck unter der Wurzel positiv ist, ergibt sich ein sinnvolles Ergebnis, der Grenzfall ist der, daß bei [3] nichts mehr ausströmt.

(d) Das Messrohr stellt eine einfache Anordnung dar zur Messung des Drucks in der Strömung an der Stelle [2]. Die Öffnung des Messrohres in die Rohrleitung ist sehr klein und genau senkrecht zur Strömung angeordnet, so dass keine nennenswerte Flüssigkeitsmenge herein- oder herausströmt.



innerhalb des Stromfadens gilt:

Bernoulli [1]-[2]: $\frac{p_1}{\rho} + gh_1 + 0 = \frac{p_2}{\rho} + gh_2 + \frac{1}{2}v_2^2$

Konti [2]-[3],[4]: $Av_2 = Av_3 + Av_4$

$$p_2 = p_1 + \rho g(h_1 - h_2) - \frac{\rho}{2}(v_3 + v_4)^2 \quad (16)$$

Im Messrohr ruht die Flüssigkeit:

$$p_2 + 0 = p_0 + \rho gh_x \quad (17)$$

$$h_x = \frac{p_2 - p_0}{\rho g} \quad (18)$$

mit den Gleichungen (13), (16) und (18):

$$h_x = h_3 - h_2 - \frac{1}{2g} \left(\frac{Q_4}{A} \right)^2 \left[1 + 2 \sqrt{2g(h_4 - h_3) \left(\frac{A}{Q_4} \right)^2 + 1} \right]$$

Bei **4** herrscht Umgebungsdruck. **2** liegt höher, und die Geschwindigkeit v_2 an dieser Stelle ist nicht kleiner als die bei **4** (solange bei **3** nichts einströmt). Deshalb muss der Druck p_2 kleiner als der Umgebungsdruck sein und der Wasserspiegel im Messröhrchen tiefer als Punkt **2** und sogar tiefer als Punkt **4** liegen. Die Apparatur muss deshalb wie folgt aussehen:

