Lösungshinweis:

TUTORIUM

Aufgabe 61

(a) Austrittsgeschwindigkeit v_{A} in Abhängigkeit vom Wasserstand h:

Aufgrund des großen Gefäßdurchmessers D ändert sich der Wasserstand h nur sehr langsam. Im gesamten System können daher die Strömungsgeschwindigkeiten wieder als annähernd konstant angesehen werden, sodaß ein quasistationärer Ansatz gewählt werden kann.

Stationäre, reibungslose Bernoulli-Gleichung von der Wasseroberfläche B bis zum Ausfluß A (Höhenform):

$$\frac{p_0}{\rho \cdot g} + \frac{v_{\mathrm{B}}^2}{2g} + (H' + h) = \frac{p_0}{\rho \cdot g} + \frac{v_{\mathrm{A}}^2}{2g} + 0 \tag{1}$$

Nach der Kontinuitätsgleichung gilt:

$$v_{\mathrm{B}} = \left(\frac{d}{D}\right)^2 \cdot v_{\mathrm{A}} \ll v_{\mathrm{A}} \tag{2}$$

Die Sinkgeschwindigkeit v_{B} des Wasserspiegels ist wieder sehr klein und somit in der Bernoulli-Gleichung gegenüber der Ausströmgeschwindigkeit v_{A} vernachlässigbar. Man erhält somit für v_{A}:

$$v_{\mathrm{A}} = \sqrt{2g(H' + h)} \tag{3}$$

Ausflußformel von Torricelli.

(b) Entleerungszeit T:

Die Entleerungszeit bei reibungsloser Strömung erhält man durch Integration der Gleichung:

$$v_{\mathrm{B}} = -\frac{dh}{dt} \tag{4}$$

$$\Rightarrow T = \int_{t=0}^{T} dt = -\int_{h=H}^{0} \frac{1}{v_{\mathrm{B}}} dh = \int_{h=0}^{H} \frac{1}{v_{\mathrm{B}}} dh \tag{5}$$

Mit $v_{\mathrm{B}} = \left(\frac{d}{D}\right)^2 \cdot v_{\mathrm{A}}$ und $v_{\mathrm{A}} = \sqrt{2g(H' + h)}$ erhält man:

$$T = \left(\frac{D}{d}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \int_{h=0}^{H} \frac{dh}{\sqrt{H' + h}} \tag{6}$$

$$= \left(\frac{D}{d}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{2g}} \left(2\sqrt{H' + h}\right)\Big|_0^H \tag{7}$$

$$T = \left(\frac{D}{d}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{g}} \left(\sqrt{H' + H} - \sqrt{H'}\right) \tag{8}$$

Mit den Werten der Aufgabenstellung:

$$T = \left(\frac{1\mathrm{m}}{0{,}01\mathrm{m}}\right)^2 \sqrt{\frac{2}{9{,}81\mathrm{m/s}^2}} \tag{9}$$

$$\cdot \left(\sqrt{0{,}5\mathrm{m} + 1\mathrm{m}} - \sqrt{0{,}5\mathrm{m}}\right) \tag{10}$$

$$T = 2337\mathrm{s} \tag{11}$$

Aufgabe 62

Die Bernoullische Gleichung für einen stationären Stromfaden lautet (z nach oben positiv):

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2} = \text{konst.}, \tag{Bernoulli}$$

die Kontinuitätsgleichung

$$\rho A v = \text{konst.} \tag{Konti}$$

(a) Der Behälter D wird als so groß angenommen, daß das Wasser darin zur Ruhe kommt ($v_2 = 0$). Für einen Stromfaden von (0) nach (2) gilt mit (Bernoulli)

$$\frac{p_0}{\rho} + gz_0 + \frac{v_0^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \frac{v_2^2}{2} \tag{12}$$

mit $v_0 = v_2 = 0$ ergibt sich

$$p_i = p_2 = p_0 + \rho g(z_0 - z_2) \tag{13}$$

$$p_i = p_0 + \rho g h_0 \tag{14}$$

(b) Die größte Kavitationsgefahr besteht in einem Wasserrohr mit konstantem Querschnitt an der höchsten Stelle (bei Vernachlässigung der Reibung): Wegen Gleichung (Konti) ist v konstant und aus (Bernoulli) folgt dann: $p \sim -z + \text{konst.}$

Um den Druck im Rohr mit der Bernoullischen Gleichung (Bernoulli) auszurechnen, benötigen wir die Strömungsgeschwindigkeit v. Die ergibt sich aus dem Massenstrom $\rho A v$, der ja nach Kontinutätsgleichung (Konti) überall gleich sein muß. Bestimmt werden kann $\rho A v$ bei (4): $A = n \cdot A_4$, wobei n die Anzahl der Entnahmestellen ist. Die Geschwindigkeit v_4 ergibt sich mit (Bernoulli):

$$\frac{p_2}{\rho} + gz_2 + 0 = \frac{p_4}{\rho} + gz_4 + \frac{v_4^2}{2} \tag{15}$$

$p_2 = p_i$ ist bekannt aus (a), $p_4 = p_0$ und $z_4 - z_2 = h_4$

$$v_4 = \sqrt{2g(h_0 - h_4)} \tag{16}$$

Es wird also der Druck an den Stellen (1) und (3) überprüft. Für (1) ergibt sich mit (Konti):

$$v_1 = \frac{nA_4}{A_1} v_4 \tag{17}$$

und mit (Bernoulli) und mit $\frac{A_4}{A_1} = \frac{1}{20}$

$$\frac{p_0}{\rho} + gz_0 + 0 = \frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \frac{v_1^2}{2} \tag{18}$$

$$p_1 = p_0 + \rho g(h_0 - h_1) - \rho g(h_0 - h_4)\frac{n^2}{400} \tag{19}$$

Für (3) ergibt sich analog:

$$v_3 = \frac{nA_4}{A_3} v_4 \tag{20}$$

$$p_3 = p_0 + \rho g(h_0 - h_3) - \rho g(h_0 - h_4)\frac{n^2}{100} \tag{21}$$

der Druck p_3 ist niedriger als p_1, weil (3) höher liegt als (1) und der Querschnitt A_3 kleiner ist als A_1 und damit die Strömungsgeschwindigkeit v_3 größer als v_1. Das kann an Gleichung (19) und (21) ablesen werden. Damit keine Kavitation auftritt, muß an den beiden kritischen Stellen (1) und (3) der Druck größer als der Dampfdruck p_D sein. Da $p_1 > p_3$ muß also gelten:

$$p_D < p_3 \Rightarrow n < 10\sqrt{\frac{\frac{1}{\rho g}(p_0 - p_D) + (h_0 - h_3)}{h_0 - h_4}} \tag{22}$$

HAUSAUFGABE

Aufgabe 60

Bei stationären Strömungen gilt entlang eines Stromfadens:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{konst.} \qquad (\text{Bernoulli})$$

(a) Die Austrittsgeschwindigkeiten v_1, v_2 und v_3 bestimmen wir mit (Bernoulli) vom Kessel zum jeweiligen Abfluss. Wir nehmen dabei an, der Kessel (k) ist groß genug, um die Fließgeschwindigkeit in ihm vernachlässigen zu können. ($v_k = 0$)
Es ergibt sich für den Stromfaden (k) → (1)

$$\frac{p_k}{\rho} + \frac{v_k^2}{2} + gH = \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 \tag{23}$$

mit $p_k = p_i = 6p_0$, $v_k = 0$ und $p_1 = p_0$

$$\frac{6p_0}{\rho} + gH = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 \tag{24}$$

$$\Rightarrow \frac{v_1^2}{2} = \frac{5p_0}{\rho} + g(H - h_1) \tag{25}$$

Analoges Vorgehen für (k) → (2) und (k) → (3)

$$\frac{6p_0}{\rho} + gH = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + g(h_1 + h_2) \tag{26}$$

$$\Rightarrow \frac{v_2^2}{2} = \frac{5p_0}{\rho} + g(H - h_1 - h_2) \tag{27}$$

$$\frac{6p_0}{\rho} + gH = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_3^2}{2} + g(h_1 + h_2 + h_3) \tag{28}$$

$$\Rightarrow \frac{v_3^2}{2} = \frac{5p_0}{\rho} + g(H - h_1 - h_2 - h_3) \tag{29}$$

Umformen von (25),(27) und (29) nach den Geschwindigkeiten:

$$v_1 = \sqrt{10\frac{p_0}{\rho} + 2g(H - h_1)} \tag{30}$$

$$v_2 = \sqrt{10\frac{p_0}{\rho} + 2g(H - h_1 - h_2)} \tag{31}$$

$$v_3 = \sqrt{10\frac{p_0}{\rho} + 2g(H - h_1 - h_2 - h_3)} \tag{32}$$

(b) Der Massenstrom $\dot{M} = \rho A v$ soll aus allen Ausflüssen gleich groß sein. Vergleicht man die Austritte 1 und 2 unter Berücksichtigung der Querschnitte F_1 und F_2 sowie der ermittelten Fließgeschwindigkeiten v_1 und v_2 ergibt sich (für $\rho =$ konst.):

$$\rho F_1 v_1 \overset{!}{=} \rho F_2 v_2 \tag{33}$$

$$\Rightarrow F_2 = F_1 \frac{v_1}{v_2} \tag{34}$$

Und genauso für F_3:

$$\rho F_1 v_1 \overset{!}{=} \rho F_3 v_3 \tag{35}$$

$$\Rightarrow F_3 = F_1 \frac{v_1}{v_3} \tag{36}$$

Aus (30),(31) & (32) lässt sich erkennen, dass $v_3 < v_2 < v_1$, also müssen die Austrittsflächen größer werden je höher man wohnt, um den selben Massenstrom $\dot{M}$ zu erreichen: $F_3 > F_2 > F_1$. Setzt man die Geschwindigkeiten ein, so erhält man:

$$F_2 = F_1\sqrt{1 + \frac{h_2}{5\frac{p_0}{\rho g} + H - h_1 - h_2}} \tag{37}$$

$$F_3 = F_1\sqrt{1 + \frac{h_2 + h_3}{5\frac{p_0}{\rho g} + H - h_1 - h_2 - h_3}} \tag{38}$$

(c) Je höher wir wohnen, desto langsamer tritt also das Wasser aus. Im Grenzfall liegt der Austritt so hoch, dass das Wasser mit einer Geschwindigkeit von 0 austritt. Wenn wir diese Information in (Bernoulli) berücksichtigen und einen Stromfaden (k) → (z_{max}) betrachten ergibt sich:

$$\frac{p_k}{\rho} + \frac{v_k^2}{2} + gH = \frac{p_0}{\rho} + \frac{0^2}{2} + gz_{max} \tag{39}$$

$$5\frac{p_0}{\rho} + gH = gz_{max} \tag{40}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_{max} = 5\frac{p_0}{g\rho} + H} \tag{41}$$

Aufgabe 64

(a) Der Druck p_2 an der Stelle $\boxed{2}$ ergibt sich aus der Bernoulligleichung zwischen $\boxed{4}$ und $\boxed{2}$. Die Flüssigkeit im Saugrohr ruht, der dynamische Druck an der Stelle $\boxed{2}$ ist also $q_2 = 0$ und der Druck ergibt sich zu

$$p_2 = p_0 - \rho g h \tag{42}$$

(Die Annahme aus Aufgabenteil **b)** $d << h$ fand hier schon Verwendung.)

(b) Damit Wasser aus dem Saugrohr in die Düse gesaugt wird muss ein Druckgefälle zwischen $\boxed{1}$ und $\boxed{2}$ bestehen. Aus der Annahme $d << h$ folgt, dass im gesamten

Düsenquerschnitt $\boxed{1}$ der gleiche Druck p_1 herrscht. Als Bedingung ergibt sich also

$$p_1 < p_2 \tag{43}$$

(c) Der Druck an der Stelle $\boxed{3}$ ist der Umgebungsdruck $p_3 = p_0$ (Freistrahl). Die Bernoulligleichung zwischen $\boxed{1}$ und $\boxed{3}$ lautet daher

$$p_1 + \frac{\rho}{2}v_1^2 = p_0 + \frac{\rho}{2}v_3^2$$

daraus folgt für den Druck an der Stelle $\boxed{1}$

$$p_1 = p_0 + \frac{\rho}{2}\left(v_3^2 - v_1^2\right) \tag{44}$$

(d) Die Kontigleichung zwischen $\boxed{1}$ und $\boxed{3}$ stellt den Zusammenhang zwischen den Geschwindigkeiten v_1 und v_3 her.

$$v_1 A_1 = v_3 A_3$$

daraus ergibt sich die Geschwindigkeit an der Stelle $\boxed{1}$

$$v_1 = \frac{A_3}{A_1}v_3 \tag{45}$$

(e) Die Bernoulligleichung zwischen $\boxed{0}$ und $\boxed{3}$ lautet

$$p_0 + \rho g H = p_0 + \frac{\rho}{2}v_3^2$$

daraus ergibt sich die Geschwindigkeit an der Stelle $\boxed{3}$ (siehe auch Torricelli)

$$v_3 = \sqrt{2gH} \tag{46}$$

(f) Setzt man nun (46) in (45) ein so erhält man

$$v_1 = \frac{A_3}{A_1}\sqrt{2gH}$$

Dies und (46) in (44) eingesetzt ergibt

$$p_1 = p_0 + \frac{\rho}{2}\left(\left[\sqrt{2gH}\right]^2 - \left[\frac{A_3}{A_1}\sqrt{2gH}\right]^2\right)$$

$$p_1 = p_0 + \frac{\rho}{2}\left(1 - \left[\frac{A_3}{A_1}\right]^2\right)2gH$$

$$p_1 = p_0 + \left(1 - \left[\frac{A_3}{A_1}\right]^2\right)\rho g H \tag{47}$$

Gleichungen (47) und (42) stellen die beiden Seiten von (43) dar. Eingesetzt ergibt

$$p_0 + \left(1 - \left[\frac{A_3}{A_1}\right]^2\right)\rho g H < p_0 - \rho g h$$

$$-\left[\frac{A_3}{A_1}\right]^2 < -\frac{h}{H} - 1$$

$$A_3^2 \overset{!}{>} A_1^2\left(\frac{h}{H} + 1\right)$$

$$A_3 > A_1\sqrt{\frac{h}{H} + 1} \Longleftrightarrow \underline{\underline{A_1 < A_3\sqrt{\frac{H}{H+h}}}}$$

$$[A_1] = \mathrm{m}^2 = [A_3]$$