

Lösungshinweis:

TUTORIUM

Aufgabe 50

Aus dem Kraftgleichgewicht am infinitesimalen Fluidteilchen erhält man mit der Volumendichte \underline{f} und dem Druck p für ein ruhendes Fluid:

$$\underline{f} = \text{grad } p \quad (1)$$

Dieselbe Formel erhält man aus der lokalen Form der Impulsbilanz für den Spezialfall Statik und für den Fall, dass der Spannungstensor nur einen Druckanteil enthält.

Im Erdschwerefeld wirkt auf einem Körper der Dichte ρ die Volumenkraftdichte

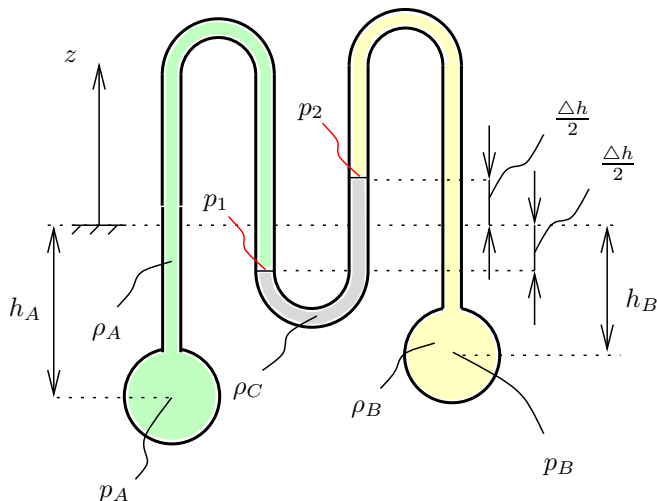
$$\begin{aligned} \underline{f}_g &= -\rho g \underline{e}_z \\ \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g \end{aligned} \quad (2)$$

Wegen $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$ ist der Druck hier nur von der Höhe z abhängig. Aus (2) ergibt sich:

$$\Rightarrow p(z) = - \int_{z_0}^z \rho g dz + p(z_0) \quad (3)$$

Bei inkompressiblen Medien ($\rho = \text{const.}$) wird daraus:

$$p(z) = p(z_0) - \rho g(z - z_0) \quad (4)$$



Ausgehend vom linken Gefäß mit p_A wird für den Druck p_1 , p_2 (siehe Skizze) und schließlich p_B ermittelt:

$$p_1 = -\rho_A g \left(h_A - \frac{\Delta h}{2} \right) + p_A \quad (5)$$

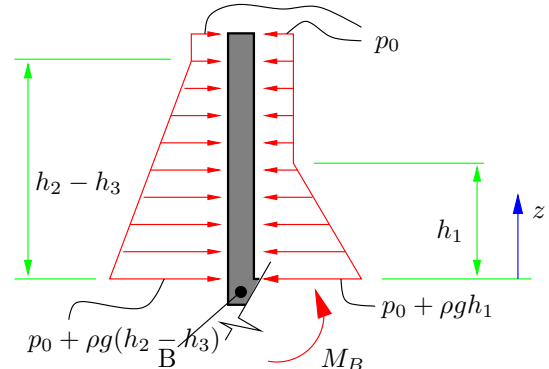
$$p_2 = -\rho_C g \Delta h + p_1 \quad (6)$$

$$p_B = -\rho_B g \left(-h_B - \frac{\Delta h}{2} \right) + p_2 \quad (7)$$

$$\Rightarrow p_A - p_B = g \left\{ \rho_A h_A - \rho_B h_B + \Delta h \left(\rho_C - \frac{\rho_A}{2} - \frac{\rho_B}{2} \right) \right\} \quad (8)$$

Aufgabe 53

(a) Freischnittsskizze der Trennwand:



Der Anteil des Luftdrucks hebt sich auf beiden Seiten aus und wird daher im Folgenden nicht berücksichtigt. Für den (aus der Wassersäule resultierenden) Druck in der Tiefe z (siehe Skizze) links und rechts der Mauer gilt dann:

$$p_l(z) = \rho g (h_2 - h_3 - z) \quad \text{bzw.} \quad p_r(z) = \rho g (h_1 - z). \quad (9)$$

Momentengleichgewicht bzgl. B:

$$M_B = \int_0^{h_2-h_3} z p_l(z) b dz - \int_0^{h_1} z p_r(z) b dz \quad (10)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{h_2-h_3} z \rho g (h_2 - h_3 - z) b dz - \int_0^{h_1} z \rho g (h_1 - z) b dz \\ &= \frac{1}{6} \rho g b \left((h_2 - h_3)^3 - h_1^3 \right), \end{aligned} \quad (11)$$

also:

$$\Leftrightarrow h_{2,\text{krit}} = h_3 + \sqrt[3]{\frac{6M_{\text{krit}}}{\rho g b} + h_1^3} \quad (12)$$

$$\approx 15,42 \text{ m} \quad (13)$$

(b) Das Ventil öffnet, wenn die Differenz der Druckkräfte gerade gleich der Gewichtskraft mg ist:

$$mg = (p_u - p_o) A = [p_0 + \rho g (h_2 - h_3) - p_0 - \rho g h_1] A \quad (14)$$

$$\Leftrightarrow A \stackrel{!}{=} \frac{m}{\rho (h_{2,\text{krit}} - h_3 - h_1)} \quad (15)$$

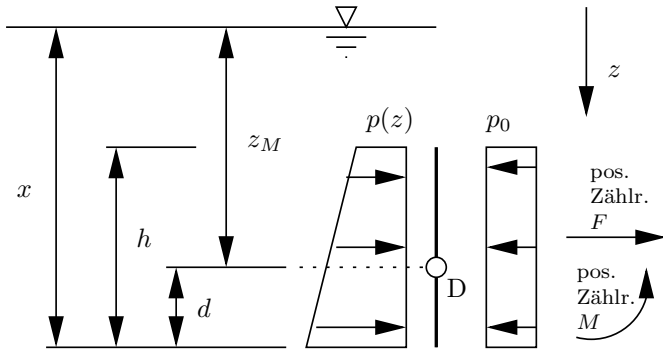
$$\approx 0,0745 \text{ m}^2 = 745 \text{ cm}^2 \quad (16)$$

(Das ist z.B. eine Kreisscheibe mit etwa 30 cm Durchmesser. Aus Stahl gebaut müßte sie etwa einen Meter dick sein.)

HAUSAUFGABE

Aufgabe 55

Freischnittsskizze für die Klappe und Geometrie:



(a) In ruhenden inkompressiblen Flüssigkeiten unter Schwerkrafteinfluß nimmt der Druck mit der Flüssigkeitstiefe linear zu:

$$p(z) = p_0 + \rho g z \quad (17)$$

Die resultierende Kraft berechnet sich als Integral des Druckes mal Normalenvektor auf die Oberfläche über die gesamte Oberfläche. Da hier nur zwei nennenswerte Oberflächen (innen und außen) mit parallelen Normalenvektoren vorhanden sind, ergibt sich (wenn der Flüssigkeitsspiegel über der Klappenoberkante ist):

$$\begin{aligned} F &= \int_{x-h}^x [p(z) - p_0] b dz = b \rho g \left[\frac{z^2}{2} \right]_{x-h}^x \\ &= b h \rho g \left(x - \frac{h}{2} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

(b) Die Klappe öffnet sich, wenn das Moment um die Drehachse M negativ wird

$$M = \int_{x-h}^x [p(z) - p_0] (z - z_m) b dz \quad (19)$$

mit $z_M = (x - d)$:

$$\begin{aligned} M &= \rho g b \left[\frac{z^3}{3} - (x-d) \frac{z^2}{2} \right]_{x-h}^x \\ &= \rho g b \left[h \left(d - \frac{h}{2} \right) x + h^2 \left(\frac{h}{3} - \frac{d}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (20)$$

Da der Wasserdruck mit der Tiefe immer zunimmt, kann die Klappe in keinem Fall öffnen, wenn $d \geq \frac{h}{2}$. Deshalb ist zu beachten, daß $2d - h < 0$ ist:

$$M < 0 \Rightarrow x > \frac{2h^2 - 3dh}{3h - 6d} =: x_{\text{krit}} \quad (21)$$

wenn der Wasserspiegel über x_{krit} steigt, öffnet sich die Klappe.

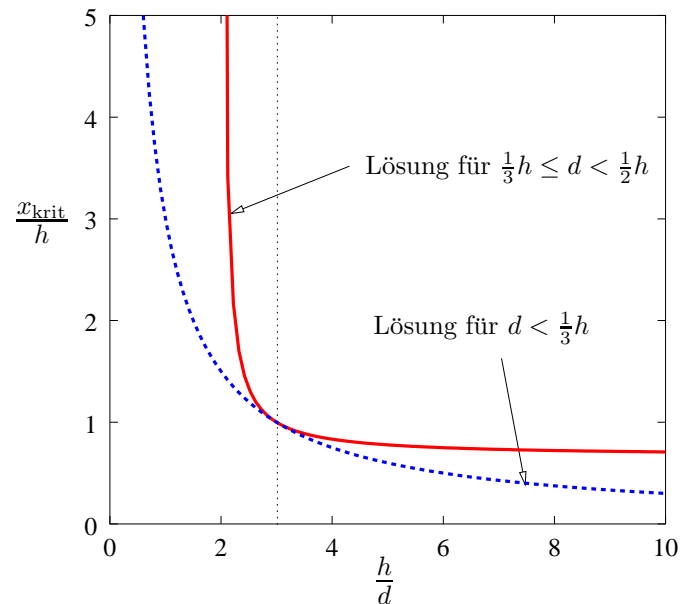
Dies ist aber nur eine Teillösung, die einen Wasserspiegel $x > h$ voraussetzt und damit nur für $2 \leq \frac{h}{d} \leq 3$ gilt. Die Teillösung wird durch die rote Kurve im angesprochenen Intervall charakterisiert (siehe Skizze).

Doch was passiert, wenn der Drehpunkt der Klappe sehr weit unten liegt? Gilt $d < \frac{h}{3}$, dann öffnet sich die Klappe bereits bevor der Wasserspiegel die obere Kante der Klappe erreicht. In diesem Fall liegt nämlich eine

Dreieck-förmige Druckverteilung vor. Der Angriffspunkt der resultierenden Druckkraft liegt bei $\frac{1}{3}x$. Liegt der Kraftangriffspunkt oberhalb des Drehpunktes, dann öffnet sich die Klappe. Daraus folgt:

$$x_{\text{krit}} > 3d, \quad h > 3d \quad (22)$$

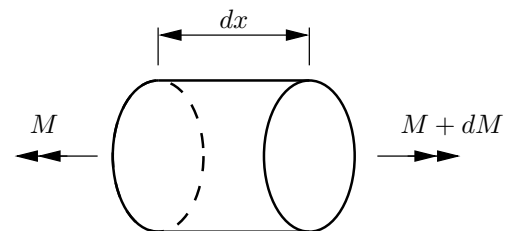
Damit beschreibt die blaue gestrichelte Kurve für den Bereich $\frac{h}{d} > 3$ das Lösungsverhalten!



(c) Für die gegebenen Zahlenwerte ist $\frac{1}{3}h < d < \frac{1}{2}h$. Wenn der Wasserstand den Wert 2,2 m erreicht, öffnet sich die Klappe.

Aufgabe 26

(a)



Materialgesetz:

$$GI_p \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = M \quad (23)$$

Drehimpulssatz zu einem bestimmten Zeitpunkt:

$$dJ_{\text{stab}} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = -M + M + dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx \quad (24)$$

mit $dJ_{\text{stab}} = I_p \rho dx$ und $c_D^2 = \frac{G}{\rho}$ ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = c_D^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \quad (25)$$

(b) Setze den Produktsatz nach Bernoulli

$$\vartheta(x, t) = X(x)T(t) \quad (26)$$

in die Wellendifferentialgleichung (25) ein:

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = c_D^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \text{konst.} (= -\omega^2) \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) &= 0 \\ \Rightarrow X''(x) + \frac{\omega^2}{c_D^2} X(x) &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

(c) Lösungen für (28):

$$\begin{aligned} T(t) &= z_1 \sin \omega t + z_2 \cos \omega t \\ X(x) &= z_3 \sin \frac{\omega}{c_D} x + z_4 \cos \frac{\omega}{c_D} x \end{aligned} \quad (29)$$

Lösung für (25) mit (29):

$$\vartheta(x, t) = X(x)T(t) \quad (30)$$

(d)

$$\vartheta(x=0, t) = 0 \quad (\text{RB 1})$$

ist eine geometrische Randbedingung

Freischneiden der Einzelmasse am rechten Ende:

$$M(x=l, t) = -J_E \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} \Big|_{x=l, t} \quad (31)$$

mit $J_E = \frac{1}{2} m r^2$ und dem Materialgesetz (23) ergibt sich

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} \Big|_{x=l, t} + \frac{2GI_p}{m r^2} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \Big|_{x=l, t} = 0 \quad (\text{RB 2})$$

(e) In Gleichung (29) kann $z_2 = 0$ gesetzt werden. Aus (RB 1) folgt $z_4 = 0$. Mit $z_5 = z_1 z_3$ ergibt sich aus (30)

$$\vartheta(x, t) = z_5 \sin \omega t \sin \frac{\omega}{c_D} x \quad (32)$$

einsetzen in (RB 2) ergibt die Frequenzgleichung

$$\tan \frac{l}{c_D} \omega = \frac{2GI_p}{m r^2 c_D} \cdot \frac{1}{\omega} \quad (33)$$

Sie hat unendlich viele Lösungen für ω .

