Lösungshinweis:

PLENARÜBUNG

Aufgabe 27

(a) Die Differentialgleichung für die Biegeschwingungen des Euler-Bernoulli-Balken lautet:

$$\ddot{w} + c^2 w^{(4)} = 0 \quad \text{mit} \quad c^2 = \frac{EI}{\rho A} \,. \tag{1}$$

Es handelt sich um eine partielle Differentialgleichung.

(b) Mit einem Produktansatz (Ansatz nach Bernoulli)

$$w(x,t) = X(x)T(t) \tag{2}$$

folgt aus (1)

$$X\ddot{T} + c^2 X^{(4)} T = 0 \tag{3}$$

und schließlich

$$\frac{\ddot{T}}{T} = -c^2 \frac{X^{(4)}}{X} = -\omega^2 \quad . \tag{4}$$

Die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen lauten dann

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \tag{5}$$

$$X^{(4)} - \lambda^4 X = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda^4 = \frac{\omega^2}{c^2} \,. \tag{6}$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung (6) lautet:

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x + \\ + C\cosh\lambda x + D\sinh\lambda x \tag{7}$$

Für die Zeitfunktion ergibt sich

$$T = \tilde{C}\cos(\omega t + \varphi) \quad .$$

(c) Aufgrund der Lagerung des Balkens liegen die folgenden Randbedingungen (jeweils zwei für jeden Rand) vor.

$$w(x=0,t) = 0 = X(0)T(t) \quad \Rightarrow \quad X(0) = 0 \tag{8}$$

$$w''(x=0,t) = 0 = X''(0)T(t) \quad \Rightarrow \quad X''(0) = 0 \tag{9}$$

$$w(x=l,t) = 0 = X(l)T(t) \quad \Rightarrow \quad X(l) = 0 \tag{10}$$

$$w'(x=l,t) = 0 = X'(l)T(t) \quad \Rightarrow \quad X'(l) = 0 \tag{11}$$

(d) Anpassen an Randbedingungen:

$$\overset{(8)}{\Rightarrow} \quad X(0) = A + C = 0 \tag{12}$$

$$\overset{(9)}{\Rightarrow} \quad X''(0) = \lambda^2(-A + C) = 0 \tag{13}$$

$$\Rightarrow \quad A = C = 0 \tag{14}$$

$$\overset{(10)}{\Rightarrow} \quad X(l) = B\sin\lambda l + D\sinh\lambda l = 0 \tag{15}$$

$$\overset{(11)}{\Rightarrow} \quad X'(l) = \lambda B\cos\lambda l + \lambda D\cosh\lambda l = 0 \tag{16}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \sin\lambda l & \sinh\lambda l \\ \lambda\cos\lambda l & \lambda\cosh\lambda l \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Es existieren nur nichttriviale Lösungen für B und D, wenn die Determinante von $\underline{\underline{A}}$ verschwindet.

$$\det\underline{\underline{A}} \overset{!}{=} 0 \tag{18}$$

$$= \lambda\sin\lambda l\cosh\lambda l - \lambda\sinh\lambda l\cos\lambda l = 0 \tag{19}$$

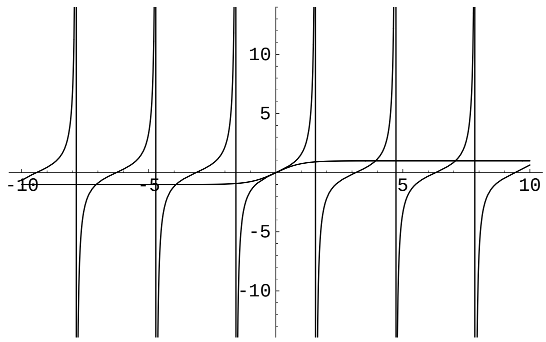
Diese Gleichung ist für $\lambda = 0$ erfüllt, was wiederum auf die triviale Lösung führt.

$$\text{für } \lambda \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\lambda l\cosh\lambda l - \sinh\lambda l\cos\lambda l = 0 \tag{20}$$

$$\Rightarrow \quad \tan\lambda l = \tanh\lambda l \tag{21}$$

Lösungen dieser Gleichung lassen sich numerisch oder grafisch bestimmen. Die numerische Berechnung ergibt

$$l\lambda_1 \approx 3{,}93$$
$$l\lambda_2 \approx 7{,}07$$
$$l\lambda_3 \approx 10{,}21$$
$$l\lambda_4 \approx 13{,}35$$



Man erkennt unschwer die Abschätzung

$$\tanh\lambda l \approx 1 \quad \text{für} \quad \lambda l > \pi \,. \tag{22}$$

Damit lassen sich die Eigenkreisfrequenzen näherungsweise berechnen.

$$\overset{(21)}{\Rightarrow} \quad \tan\lambda l = \tanh\lambda l \approx 1 \tag{23}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\lambda l \overset{!}{=} \cos\lambda l \tag{24}$$

Es folgt also

$$\lambda_k l = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{für} \quad k = 1, \ldots, \infty \quad . \tag{25}$$

Vergleich mit den numerischen Ergebnissen zeigt, dass selbst für λ_1 schon sehr gute Ergebnisse erzielt werden.

Die Eigenkreisfrequenzen ω_k ergeben sich schließlich wie folgt.

$$\lambda_k^2 = \frac{\omega_k}{c} \tag{26}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_k = \frac{c}{l^2}\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)^2 \tag{27}$$

Aufgabe 44

(a) $w(x,t)$ sei die Durchsenkung des Balkens.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -c_B^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \qquad , c_B^2 = \frac{EI}{\rho A} \tag{28}$$

Geometrische Randbedingung an beiden Seiten:

$$w(x=0,t) = 0 \tag{RB 1}$$
$$w(x=L,t) = 0 \tag{RB 2}$$

Links ist das Moment gleich Null (drehbares Lager) und rechts ist es vorgegeben:

$$\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=0,t} = 0 \tag{RB 3}$$
$$\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=L,t} = -\frac{M_0}{EI}\cos\Omega t \tag{RB 4}$$

(b) Gesucht wird eine Schwingung mit der Frequenz der Anregung. Ansatz für eine solche partikuläre Lösung:

$$w(x,t) = X(x)\cos\Omega t \tag{29}$$

eingesetzt in (28):

$$X'''' - \frac{\Omega^2}{c_B^2} X = 0 \tag{30}$$

Die allgemeine homogene Lösung dieser gewöhnlichen linearen homogenen DGL lautet:

$$X(x) = A_1\cosh\lambda x + A_2\sinh\lambda x + A_3\cos\lambda x + A_4\sin\lambda x \qquad \text{mit } \lambda = \sqrt{\frac{\Omega}{c_B}} \tag{31}$$

(Im Unterschied zu den Eigenwertproblemen bei freien Schwingungen sind Ω und damit auch λ bekannt!)

Die Konstanten A_1 bis A_4 müssen aus den Randbedingungen bestimmt werden. (31) eingesetzt in

$$\text{(RB 1)} \Rightarrow \qquad A_1 + A_3 = 0 \tag{32}$$
$$\text{(RB 3)} \Rightarrow \qquad A_1 - A_3 = 0 \tag{33}$$
$$\hookrightarrow A_1 = 0,\ A_3 = 0 \tag{34}$$

$$\text{(RB 2)} \Rightarrow \qquad A_2\sinh\lambda L + A_4\sin\lambda L = 0 \tag{35}$$
$$\text{(RB 4)} \Rightarrow \qquad A_2\sinh\lambda L - A_4\sin\lambda L = -\frac{M_0}{\lambda^2 EI} \tag{36}$$

Durch Addition bzw. Subtraktion von Gl. (35) und (36) ergibt sich:

$$A_2 = \frac{-M_0}{2EI\lambda^2\sinh\lambda L} \tag{37}$$
$$A_4 = \frac{M_0}{2EI\lambda^2\sin\lambda L} \tag{38}$$

Nebenbemerkung:
Der Nenner von A_4 wird Null und damit die Auslenkung unendlich („Resonanzkatastrophe“) wenn

$$\lambda L = k\pi \qquad , k = 1,2,3,...\infty \tag{39}$$
$$\Rightarrow \Omega = c_B\frac{\pi^2}{L^2}k^2 \qquad , k = 1,2,3,...\infty \tag{40}$$

angepaßte Lösung, Schwingungsform:

$$X(x) = \frac{M_0}{2EI\lambda^2}\left[\frac{\sin\lambda x}{\sin\lambda L} - \frac{\sinh\lambda x}{\sinh\lambda L}\right] \tag{41}$$