Lösungshinweis:

TUTORIUM

Aufgabe 29

(a) Bewegungsdifferentialgleichung mit zugehörigen Randbedingungen

Bewegungsdifferentialgleichung

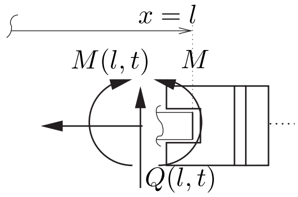
$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{EI}{\mu}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \tag{1}$$

Randbedingungen

$$w(0,t) = 0 \tag{2}$$

$$M(0,t) = -EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\bigg|_{(0,t)} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_{(l,t)} = 0 \tag{4}$$



Schwerpunktsatz in positive w-Richtung:

$$m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\bigg|_{(l,t)} = -Q(l,t) = EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\bigg|_{(l,t)} \tag{5}$$

Produktansatz

$$w(x,t) = X(x)T(t) \tag{6}$$

Einsetzen in Gl. (1) mit den Abkürzungen

$$c_B := \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad \text{und} \quad \lambda := \sqrt{\frac{\omega}{c_B}} \tag{7}$$

ergibt

$$\frac{\ddot{T}}{T} = -c_B^2\frac{X''''}{X} = -\omega^2 \tag{8}$$

$$\Longrightarrow \ddot{T} + \omega^2 T = 0 \tag{9}$$

$$\Longrightarrow X'''' - \lambda^4 X = 0 \tag{10}$$

allgemeine Lösung von Gl. (10) mit den Unbekannten $\beta_1, \dots, \beta_4; \lambda(\omega)$:

$$X(x) = \beta_1 \cosh\lambda x + \beta_2 \sinh\lambda x ... \tag{11}$$

$$... + \beta_3 \cos\lambda x + \beta_4 \sin\lambda x \tag{12}$$

Randbedingungen

$$(2) \to 0 = X(0)$$
$$(3) \to 0 = X''(0)$$
$$(4) \to 0 = X'(l)$$
$$(5) \to 0 = m\omega^2 X(l) + EIX'''(l) \quad \text{(wg. (9))!}$$

(b) Frequenzgleichung

$$X(0) = X''(0) = 0 \Rightarrow \beta_1 = \beta_3 = 0$$
$$X'(l) = 0$$
$$\Rightarrow \beta_2 \cosh\lambda l + \beta_4 \cos\lambda l = 0$$
$$m\omega^2 X(l) + EIX'''(l) = 0$$
$$\Rightarrow (m\omega^2 \sinh\lambda l + EI\lambda^3 \cosh\lambda l)\beta_2 ...$$
$$... + (m\omega^2 \sin\lambda l - EI\lambda^3 \cos\lambda l)\beta_4 = 0$$

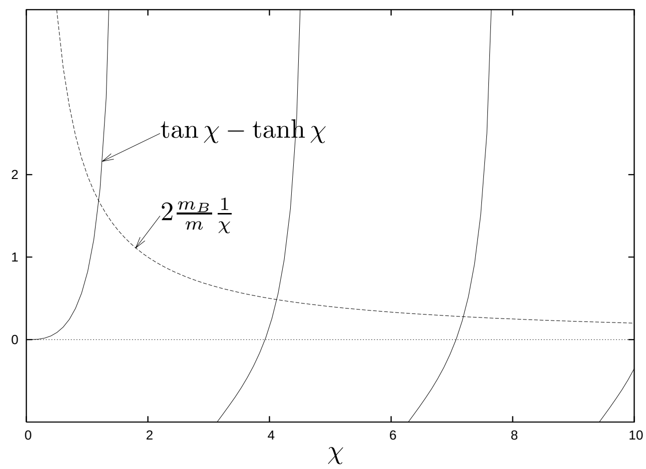
Mit Abkürzungen für die trig. und hyperb. Funktionen ist die notw. Bedingung für nichttriviale Lösungen ($\beta_2, \beta_4 \neq 0$):

$$\begin{vmatrix} \mathrm{ch}_{\lambda l} & \mathrm{c}_{\lambda l} \\ m\omega^2 \mathrm{sh}_{\lambda l} + EI\lambda^3 \mathrm{ch}_{\lambda l} & m\omega^2 \mathrm{s}_{\lambda l} - EI\lambda^3 \mathrm{c}_{\lambda l} \end{vmatrix} = 0$$
$$\Longrightarrow m\omega^2(\tanh\lambda l - \tan\lambda l) + 2EI\lambda^3 = 0$$
$$\text{mit} \quad \chi := \lambda l; \quad m_B := \mu l \quad \text{folgt:}$$
$$\boxed{\tan\chi - \tanh\chi = 2\frac{m_B}{m}\frac{1}{\chi}}$$

Dies ist die gesuchte Frequenzgleichung. Beachte dabei die Definition von λ in Gl. (7).

Grafische Lösung:

Manchmal kann man eine grafische Lösung gewinnen, indem man die linke und die rechte Seite der Frequenzgleichung geeignet aufträgt und Schnittpunkte sucht. Hier ist das geschehen für das Massenverhältnis $\frac{m_B}{m} = 1$:

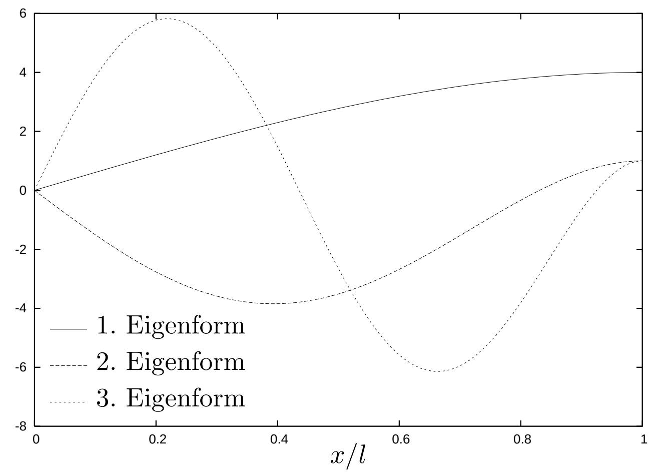


Eigenformen

Die Eigenformen genügen der folgenden Gleichung:

$$X(x) = \beta_2\left(\sinh\lambda x - \frac{\cosh\lambda l}{\cos\lambda l}\sin\lambda x\right) \tag{13}$$

Die ersten drei Eigenformen:



Aufgabe 47

(a) Kleine Biegeschwingungen des Balkens werden durch die partielle Differentialgleichung

$$EI \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{14}$$

beschrieben. Die Randbedingungen sind für den betrachteten Balken

$$\begin{aligned} w(-l,t) &= \hat{s}\cos(\Omega t) \quad , \\ w(l,t) &= \hat{s}\cos(\Omega t) \quad , \\ \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{(-l,t)} &= 0 \quad , \\ \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{(l,t)} &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{15}$$

Die ersten beiden Randbedingungen tragen der erzwungenen Bewegung Rechnung. Die letzten beiden Randbedingungen beschreiben die momentenfreien Ränder.

(b) Für den eingeschwungenen Zustand wird eine partikuläre Lösung des Randwertproblems (14), (15) gesucht. Man setzt

$$w(x,t) = W(x) \cdot \cos(\Omega t) \tag{16}$$

an.

Einsetzen von (16) in (14) führt auf die gewöhnliche Differentialgleichung

$$W^{(4)} - \kappa^4 W = 0 \quad mit \quad \kappa^4 = \frac{\mu \Omega^2}{EI}. \tag{17}$$

Die allgemeine Lösung von (17) lautet

$$W(x) = C_1\cos(\kappa x) + C_2\sin(\kappa x) + C_3\cosh(\kappa x) + C_4\sinh(\kappa x), \tag{18}$$

wie man durch einen $e^{\lambda x}$ - Ansatz herleiten kann. Einsetzen von (18) in die Randbedingungen (2) führt auf ein Gleichungssystem für die vier Unbekannten C_1, C_2, C_3, C_4:

$$\begin{bmatrix} \cos(\kappa l) & -\sin(\kappa l) & \cosh(\kappa l) & -\sinh(\kappa l) \\ \cos(\kappa l) & \sin(\kappa l) & \cosh(\kappa l) & \sinh(\kappa l) \\ -\cos(\kappa l) & \sin(\kappa l) & \cosh(\kappa l) & -\sinh(\kappa l) \\ -\cos(\kappa l) & -\sin(\kappa l) & \cosh(\kappa l) & \sinh(\kappa l) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{s} \\ \hat{s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lösen ergibt

$$\begin{aligned} C_2 &= C_4 = 0 \quad , \\ C_1 &= \tfrac{\hat{s}}{2\cos(\kappa l)} \quad , \\ C_3 &= \tfrac{\hat{s}}{2\cosh(\kappa l)} \quad . \end{aligned} \tag{19}$$

Die Balkenschwingung im eingeschwungenen Zustand wird demnach durch

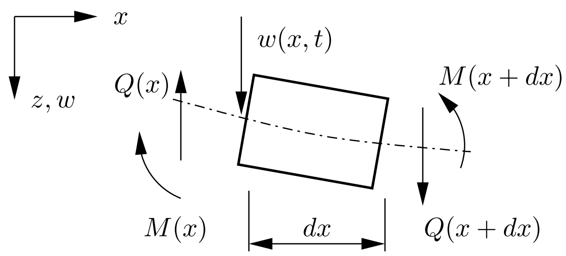
$$w(x,t) = \frac{\hat{s}}{2}\left(\frac{\cos(\kappa x)}{\cos(\kappa l)} + \frac{\cosh(\kappa x)}{\cosh(\kappa l)}\right)\cos(\Omega t) \tag{20}$$

beschrieben.

HAUSAUFGABE

Aufgabe 31

(a)



Das zweite Newtonsche Gesetz für das skizzierte Balkenelement lautet:

$$dm \cdot \left.\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right|_{(x,t)} = Q(x+dx) - Q(x) \tag{21}$$

mit $dm = \rho A dx$ und $\frac{Q(x+dx)-Q(x)}{dx} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ergibt sich

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{22}$$

Wegen $Q = \frac{\partial M}{\partial x}$ (Drehträgheit des infitesimalen Balkenelements vernachlässigbar) und dem Materialgesetz $M = -EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ergibt sich für konstantes ρ, A, E, I die DGl

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho A}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \tag{23}$$

(b) Separationsansatz nach Bernoulli:

$$w(x,t) = X(x) \cdot T(t) \tag{24}$$

Eingesetzt in (23) ergibt

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \tag{25}$$

$$X'''' - \frac{\omega^2}{c_Q^2} X = 0 \tag{26}$$

mit $c_Q^2 = \frac{EI}{\rho A}$ und ω noch zu bestimmende Konstante.

(c) Die gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichungen (25) und (26) werden mit einem Exponentialansatz gelöst.

$$T(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega \tag{27}$$

Die allgemeine Lösung kann dann in der folgenden Form geschrieben werden:

$$T(t) = B_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t \tag{28}$$

Für die Ortsfunktion ergibt sich:

$$X(x) = e^{\mu x} \Rightarrow \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}},\ \mu_{3,4} = \pm i\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}, \tag{29}$$

Die allgemeine Lösung kann in diesem Fall folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} X(x) = B_3 \cosh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x + B_4 \sinh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x \\ + B_5 \cos\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x + B_6 \sin\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x \end{aligned} \tag{30}$$

Nebenbemerkung:
Um letzteres zu beweisen, wird eingesetzt:

$$\sinh\alpha = \frac{1}{2}\left(e^{\alpha} - e^{-\alpha}\right) \qquad \cosh\alpha = \frac{1}{2}\left(e^{\alpha} + e^{-\alpha}\right)$$
$$\sin\alpha = \frac{1}{2i}\left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right) \qquad \cos\alpha = \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow X(x) = \frac{1}{2}\left(B_3 + B_4\right)e^{\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x} + \frac{1}{2}\left(B_3 - B_4\right)e^{-\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x} \\ + \frac{1}{2}\left(B_5 - iB_6\right)e^{i\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x} + \frac{1}{2}\left(B_5 + iB_6\right)e^{-i\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x} \end{aligned} \tag{31}$$

Die allgemeine Lösung der Bewegungsdifferentialgleichung (23) lautet dann:

$$\begin{aligned} w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(B_{1,k}\cos\omega_k t + B_{2,k}\sin\omega_k t\Big) \\ \Big(B_{3,k}\cosh\sqrt{\frac{\omega_k}{c_Q}}x + B_{4,k}\sinh\sqrt{\frac{\omega_k}{c_Q}}x \\ + B_{5,k}\cos\sqrt{\frac{\omega_k}{c_Q}}x + B_{6,k}\sin\sqrt{\frac{\omega_k}{c_Q}}x\Big) \end{aligned} \tag{32}$$

(d) Am linken Rand feste Einspannung, geometrische Randbedingung:

$$w(x=0,t) = 0 \tag{RB 1}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{(x=0,t)} = 0 \tag{RB 2}$$

Am rechten Rand ergeben sich dynamische Randbedingungen:
Eine Punktmasse hat keine Drehträgheit, das Moment ist Null:

$$M(x=l,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{(x=l,t)} = 0 \tag{RB 3}$$

Die Querkraft ergibt sich durch Freischneiden der Punktmasse m aus dem zweiten Newtonschen Gesetz:

$$m\left.\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right|_{(x=l,t)} = -Q(l,t) \tag{33}$$

mit $Q = -EIw'''$ ergibt sich:

$$\frac{m}{EI}\left.\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right|_{(x=l,t)} = \left.\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right|_{(x=l,t)} \tag{RB 4}$$

(e) Wenn die Randbedingungen zu jeder beliebigen Zeit gelten sollen, muß jede einzelne Fundamentallösung die Randbedingungen erfüllen.

$$\text{(RB 1)} \Rightarrow \quad B_3 + B_5 = 0 \tag{34}$$
$$\text{(RB 2)} \Rightarrow \quad B_4 + B_6 = 0 \tag{35}$$

Für die beiden anderen Randbedingungen werden folgende Ableitungen benötigt:

$$\begin{aligned} X''(x) = \frac{\omega}{c_Q}\Big[B_3\cosh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x + B_4\sinh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x \\ - B_5\cos\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x - B_6\sin\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x\Big] \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} X'''(x) = \left(\frac{\omega}{c_Q}\right)^{\frac{3}{2}}\Big[B_3\sinh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x + B_4\cosh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x \\ + B_5\sin\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x - B_6\cos\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x\Big] \end{aligned} \tag{37}$$

$$\ddot{T}(t) = -\omega^2 T(t) \tag{38}$$

und es ergibt sich für (RB 3):

$$\begin{aligned} B_3\cosh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}l + B_4\sinh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}l \\ - \left(-B_3\right)\cos\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}l - \left(-B_4\right)\sin\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}l = 0 \end{aligned} \tag{39}$$

Für (RB 4) ergibt sich auch eine Gleichung für B_3 und B_4, zusammen mit (39) in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_3 \\ B_4 \end{pmatrix} = 0 \tag{40}$$

mit

$$M_{11} = \cosh\chi + \cos\chi \tag{41}$$
$$M_{12} = \sinh\chi + \sin\chi \tag{42}$$
$$\begin{aligned} M_{21} = -\omega^2\frac{m}{EI}\Big(\cosh\chi - \cos\chi\Big) \\ - \left(\frac{\omega}{c_Q}\right)^{\frac{3}{2}}\Big(\sinh\chi - \sin\chi\Big) \end{aligned} \tag{43}$$
$$\begin{aligned} M_{22} = -\omega^2\frac{m}{EI}\Big(\sinh\chi - \sin\chi\Big) \\ - \left(\frac{\omega}{c_Q}\right)^{\frac{3}{2}}\Big(\cosh\chi + \cos\chi\Big) \end{aligned} \tag{44}$$
$$\chi := \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}l \tag{45}$$

Eine Lösung, bei der $B_3 \neq 0$ und $B_4 \neq 0$, kann es nur geben, wenn die Determinante der Matrix verschwindet:

$$M_{11}\,M_{22} - M_{12}\,M_{21} \overset{!}{=} 0 \tag{46}$$

$$\Rightarrow \frac{\cosh\chi\sin\chi - \sinh\chi\cos\chi}{\cosh\chi\cos\chi + 1} = \frac{m_B}{m}\cdot\frac{1}{\chi} \tag{47}$$

Mit (47) und (45) lassen sich numerisch die Eigenfrequenzen ω_k ermitteln.

Aufgabe 45

Für die Durchbiegung des Balkens gilt die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{EI}{\mu}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0\ . \tag{48a}$$

Am rechten Rand ($x = l$) ist die Verdrehung vorgegben

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{(l,t)} = -\hat{\alpha}\sin\Omega t \tag{48b}$$

und außerdem muß dort die Durchbiegung stets 0 sein

$$w\,(l,t) = 0 \quad . \tag{48c}$$

Am linken Rand ($x = 0$) müssen Durchbiegung und Biegemoment verschwinden, also

$$w\,(0,t) = 0 \tag{48d}$$

$$\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{(0,t)} = 0 \quad . \tag{48e}$$

Das Randwertproblem (48) ist durch eine partielle Differentialgleichung und vier Randbedingungen beschrieben. Die Differentialgleichung ist homogen, die Randbedingungen inhomogen. Im eingeschwungenen Zustand geht man davon aus, daß alle durch die Anfangsbedingungen angeregten Schwingungen bereits abgeklungen sind. Gesucht ist nun eine partikuläre Lösung für (48). Für die erzwungene Schwingung wird angesetzt

$$w\,(x,t) = W\,(x)\sin\Omega t \tag{49}$$

(Ansatz vom Typ der rechten Seite). Eingesetzt in die Differentialgleichung (48a) ergibt sich

$$-\Omega^2 W\sin\Omega t + \frac{EI}{\mu}W^{(4)}\sin\Omega t = 0 \quad . \tag{50}$$

Diese Gleichung muß für alle t und x erfüllt sein. Dies ist nur möglich, wenn

$$W^{(4)} - \lambda^4 W = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda^4 = \frac{\Omega^2\mu}{EI} \quad . \tag{51}$$

Die allgemeine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung (51) lautet

$$W = A_1\cosh(\lambda x) + A_2\sinh(\lambda x) + A_3\cos(\lambda x) + A_4\sin(\lambda x) \quad , \tag{52}$$

wie man leicht durch einen $e^{\beta t}$-Ansatz erhält. Einsetzen von (52) in die Randbedingungen führt auf die vier Konstanten A_i.

Aus den Randbedingungen am linken Rand (48d) und (48e) erhält man

$$A_1 = A_3 = 0 \quad .$$

Aus den verbleibenden Randbedingungen (48b) und (48c) ergeben sich die Konstanten zu

$$A_2 = \frac{\sin\lambda l}{\cos\lambda l\sinh\lambda l - \sin\lambda l\cosh\lambda l}\frac{\hat{\alpha}}{\lambda} \quad ,$$

$$A_4 = -\frac{\sinh\lambda l}{\cos\lambda l\sinh\lambda l - \sin\lambda l\cosh\lambda l}\frac{\hat{\alpha}}{\lambda} \quad .$$

Die Schwingung wird somit durch

$$w\,(x,t) = \frac{\sin\lambda l\sinh\lambda x - \sinh\lambda l\sin\lambda x}{\cos\lambda l\sinh\lambda l - \sin\lambda l\cosh\lambda l}\frac{\hat{\alpha}}{\lambda}\sin\Omega t$$

mit

$$\lambda^4 = \frac{\Omega^2\mu}{EI}$$

beschrieben. Die Formel versagt, wenn

$$\tanh\lambda l - \tan\lambda l = 0 \quad . \tag{53}$$

Durch diese Gleichungen sind die Eigenfrequenzen des Systems bestimmt.